4 Magnetické pole vo vákuu

4.1 Úvod

Väčšina tvrdení a vzťahov, ktoré tu uvedieme, platí rovnako vo vákuu ako v prítomnosti látok interagujúcich s magnetickým poľom (magneticky aktívnych materiálov, magnetík). Pri tých tvrdeniach a vzťahoch, ktoré vo všeobecnosti *neplatia v prítomnosti magnetík*, tento fakt explicitne uvedieme kurzívou ako poznámku.

V okolí permanentných magnetov, v okolí pohybujúcich sa nabitých telies, v okolí telies, ktorými preteká elektrický prúd, a v miestach s časovo premenlivým elektrickým poľom vzniká magnetické pole. Toto pole sa prejavuje tak, že pôsobí silami na iné permanentné magnety, pohybujúce sa nabité telesá a telesá pretekané elektrickým prúdom, ktoré sa v ňom nachádzajú.

Na popis magnetického poľa sa používajú veličiny ***magnetická indukcia B*** (tiež "*hustota magnetického toku*") a ***intenzita magnetického poľa H***. Z nich priamejší fyzikálny význam má magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$, lebo priamo súvisí so silovými účinkami magnetického poľa. Vo vákuu medzi týmito dvomi veličinami platí vzťah $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ (*neplatí v magnetikách*), kde konštanta $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$ je ***permeabilita vákua*** (tiež "*magnetická konštanta*").

Magnetické pole elementu prúdovodiča (***Biotov-Savartov zákon***): Nekonečne krátky element prúdovodiča s dĺžkou $\mathrm{d}\ell$, ktorým v smere $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ tečie elektrický prúd I, vytvára v bode, ktorý má vzhľadom naň polohový vektor $\boldsymbol{r}$, magnetické pole s magnetickou indukciou $\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{I \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$ (*neplatí v magnetikách ani v ich okolí*). Platí zákon superpozície, to znamená, že výslednú magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$ v danom bode od celého prúdovodiča určíme integráciou príspevkov $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ od celej dĺžky prúdovodiča ℓ. V prípade viacerých prúdovodičov sa ich príspevky k magnetickej indukcii v danom bode vektorovo sčítajú.

Magnetické pole pohybujúceho sa bodového náboja: Bodový náboj Q, pohybujúci sa rýchlosťou v, vytvára v bode, ktorý má vzhľadom naň polohový vektor $\boldsymbol{r}$, magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$ (*neplatí v magnetikách ani v ich okolí*). V prípade viacerých pohybujúcich sa nábojov sa podľa zákona superpozície ich príspevky k magnetickej indukcii vektorovo sčítajú.

Ampérov zákon (tiež "*zákon prietoku*" alebo "*zákon celkového prúdu*"):
Integrálny tvar zákona: Pre dráhový integrál intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ po ľubovoľnej uzavretej dráhe ℓ platí $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I + I_\mathrm{p}$, kde $I = \sum_{k=1}^{n} I_k$ je algebrický súčet všetkých prúdov vo vodičoch, ktoré pretínajú ľubovoľnú plochu S ohraničenú integračnou dráhou ℓ, a $I_\mathrm{p} = \int_S \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (s integráciou cez tú istú plochu S, kde $\boldsymbol{D}$ je elektrická indukcia v mieste elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$) je takzvaný ***Maxwellov posuvný prúd***, ktorý treba brať do úvahy v prípade, že plocha S prechádza miestami s nestacionárnym elektrickým poľom, napríklad priestorom medzi doskami nabíjajúceho alebo vybíjajúceho sa kondenzátora. Kladná orientácia prúdov je daná postupom pravotočivej skrutky, otáčajúcej sa súhlasne s kladnou orientáciou integračnej dráhy ℓ. Pri spojitom rozložení prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ treba súčet prúdov I nahradiť integrálnym prúdom prúdovej hustoty, ktorá preniká plochou S, $I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

Diferenciálny (lokálny) tvar zákona: Ampérov zákon možno písať aj v diferenciálnom tvare $\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, ktorý na rozdiel od integrálneho tvaru, týkajúceho sa určitej plochy S, dáva do súvisu vektory $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{D}$ v jednom bode. Táto rovnica je jedna zo štyroch Maxwellových rovníc elektromagnetického poľa.

V špeciálnom prípade, keď plocha S, ohraničená integračnou dráhou ℓ, prechádza iba miestami so stacionárnym elektrickým poľom (v prípade Ampérovho zákona v integrálnom tvare), alebo keď popisujeme magnetické pole v bode, kde je elektrické pole stacionárne (v diferenciálnom tvare), možno Ampérov zákon písať v zjednodušenom integrálnom tvare $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I$ a zjednodušenom diferenciálnom tvare $\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$. Pri riešení úloh z magnetického poľa je využitie Ampérovho zákona podobné ako využitie Gaussovho zákona elektrostatiky pri riešení úloh z elektrostatiky.

Magnetický tok cez plochu S je definovaný výrazom $\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde d$\boldsymbol{S}$ je vektorový element plochy S. Ak je plocha S uzavretá, tok vektora magnetickej indukcie cez ňu je vždy nulový, $\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$, čo možno zapísať v diferenciálnom tvare ako $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$. Je to ďalšia z Maxwellových rovníc elektromagnetického poľa.

Na náboj Q, ktorý sa v magnetickom a súčasne elektrickom poli pohybuje rýchlosťou v, pôsobí ***Lorentzova sila*** $\boldsymbol{F} = Q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) = Q\boldsymbol{E} + Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického poľa. Prvý člen výrazu je elektrická sila, druhý člen je magnetická sila. Na element prúdovodiča I d$\boldsymbol{\ell}$ pôsobí v magnetickom poli sila $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$.

Každá prúdová slučka predstavuje ***magnetický dipól*** [1]. Možno pre ňu definovať ***magnetický moment*** (tiež "*elektromagnetický moment*") $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{S}$ je vektor plochy ohraničenej prúdom I, pričom orientácia vektora $\boldsymbol{S}$ je daná orientáciou postupu pravotočivej skrutky, ktorá sa otáča súhlasne s prúdom I v slučke. Na prúdovú slučku umiestnenú v homogénnom magnetickom poli pôsobí moment sily $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$. Potenciálnu energiu prúdovej slučky v homogénnom magnetickom poli možno vyjadriť vzťahom $E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$. ***Hustota energie magnetického poľa*** (tiež "*objemová magnetická energia*") je $w = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$.

4.2 Otázky a problémy

1. Zmení sa magnetické pole v okolí elektrického obvodu, ak sa zmení orientácia prúdu v obvode?
2. Z jednej cievky na druhú premotávame drôt, ktorým tečie elektrický prúd. Rýchlosť premotávania sa práve rovná strednej usmernenej (driftovej) rýchlosti elektrónov v drôte, jej orientácia je však opačná. Vytvorí sa v okolí drôtu magnetické pole?
3. Čo sú indukčné čiary magnetického poľa?
4. Aká je súvislosť (kvalitatívne) medzi hustotou magnetických indukčných čiar a veľkosťou magnetickej indukcie?
5. Schematicky nakreslite sústavu indukčných čiar magnetického poľa v okolí vodiča, ktorým preteká elektrický prúd, ak ide o a) dlhý priamy vodič, b) jednoduchú slučku, c) dlhý solenoid.
6. Koaxiálny kábel je sústava dvoch súosových valcových vodičov, medzi ktorými je vrstva dielektrika (obr. 4.17). Pomocou Ampérovho zákona ukážte, že v okolí koaxiálneho kábla, ktorého vodičmi tečú vzájomne opačne orientované rovnako veľké prúdy, je magnetická indukcia nulová, takže celé magnetické pole je sústredené v objeme kábla.
7. Toroid je vo všeobecnosti teleso v tvare kruhového prstenca (torusu, anuloidu), ako napr. duša automobilovej pneumatiky alebo koleso na plávanie. V elektrotechnike sa pod pojmom toroid obyčajne rozumie husto radiálne navinutá cievka takéhoto prstencovitého tvaru (obr. 4.7). Schematicky nakreslite magnetické pole toroidu v rovine prstenca a pomocou Ampérovho zákona ukážte, že v tejto rovine je magnetická indukcia v okolí toroidu (mimo jeho dutiny) nulová.
   ***Poznámka**: Magnetická indukcia má však malú nenulovú zložku v smere kolmom na rovinu prstenca, pretože v dôsledku stúpania závitov toroid predstavuje jednu veľkú prúdovú slučku, ležiacu v rovine prstenca, a tá vytvára vo svojom okolí magnetické pole.*
8. Predstavme si elektrický obvod uzavretý v myslenej guľovej ploche. Závisí magnetický tok magnetického poľa obvodu cez guľovú plochu od polomeru tejto plochy? Zmení sa situácia, ak bude elektrický obvod umiestnený celý alebo čiastočne mimo gule ohraničenej guľovou plochou?
9. Môže nastať situácia, že sila pôsobiaca na nabitú časticu, ktorá sa pohybuje v magnetickom poli, je nulová?

[1] Pozor pri používaní pojmu *magnetický dipól*, pozri lit. [40], str. 241.

10. V ktorom prípade sa pod vplyvom homogénneho magnetického poľa bude meniť smer pohybujúceho sa elektrónu: keď elektrón vletí do magnetického poľa v smere indukčnej čiary, alebo keď do neho vletí kolmo na indukčné čiary?
11. Rozhodnite, v ktorých z nasledujúcich prípadov pôsobia na seba dva bodové elektrické náboje magnetickými silami: a) obidva náboje sú nehybné, b) jeden náboj sa pohybuje, druhý je nehybný, c) obidva náboje sa pohybujú po tej istej priamke, d) náboje sa pohybujú po dvoch rovnobežných priamkach, pričom ich spojnica je práve kolmá na priamky, e) náboje sa pohybujú po dvoch rovnobežných priamkach, pričom ich spojnica nie je kolmá na priamky f) náboje sa pohybujú po dvoch vzájomne kolmých priamkach mimo priesečníka priamok, g) náboje sa pohybujú po dvoch vzájomne kolmých priamkach, pričom jeden z nich sa práve nachádza v priesečníku priamok. Vyjadrite a do obrázka zakreslite vždy obidve magnetické sily, to znamená silu pôsobiacu na prvý náboj a silu pôsobiacu na druhý náboj, a porovnajte ich.
    Poznámka: *Vyriešením tejto úlohy zistíte, že v prípadoch* (e) *a* (f) *sily vo všeobecnosti nepôsobia v smere spojnice nábojov a že v prípadoch* (f) *a* (g) *majú rôznu absolútnu hodnotu. K rovnakému záveru vedie aj porovnanie úplných Lorentzových síl, zahrňujúcich aj elektrické sily. Keďže tu ide o sily, ktorými na seba vzájomné pôsobia dve telesá, znamená to, že pre magnetické sily medzi nábojmi neplatí tretí Newtonow zákon (zákon akcie a reakcie)* (!) *a že to isté platí aj pre úplné Lorentzove sily. Tento zarážajúci fakt je dôsledkom toho, že magnetizmus je v skutočnosti relativistický jav, takže ho nie je možné úplne popísať zákonmi klasickej fyziky. Magnetické sily sa objavujú, keď pri vzájomnom elektrickom pôsobení pohybujúcich sa nábojov vezmeme do úvahy konečnú rýchlosť šírenia elektrického pôsobenia (konečnú rýchlosť šírenia elektromagnetického vlnenia, čiže svetla). Také javy možno úplne popísať iba v rámci teórie relativity. (Bližšie pozri lit. [40], str.241).*
12. Po akej trajektórii sa bude v homogénnom magnetickom poli pohybovať elektrón, ktorého počiatočná rýchlosť je kolmá na vektor magnetickej indukcie? Pre porovnanie rovnaká otázka s elektrickým poľom: po akej trajektórii sa bude v homogénnom elektrickom poli pohybovať elektrón, ktorého počiatočná rýchlosť je kolmá na vektor intenzity elektrického poľa?
13. Vyjadrite výkon sily, ktorá pôsobí na náboj pohybujúci sa v magnetickom poli. Na základe výsledku rozhodnite, či táto sila môže konať prácu.
14. Môže nastať prípad, že Lorentzova sila, pôsobiaca na nabitú časticu, ktorá sa pohybuje v elektrickom a magnetickom poli, je nulová?
15. Má elektrickú zložku Lorentzova sila, ktorá pôsobí na pohybujúci sa elektrón v okolí a) vodiča, ktorým tečie elektrický prúd, b) elektrónového lúča?
16. Pôsobia na seba magnetickými silami a) dva rovnobežné vodiče, ktorými tečie elektrický prúd, b) dva rovnobežné elektrónové lúče (zväzky elektrónov), c) vodič, ktorým tečie elektrický prúd, a rovnobežný elektrónový lúč? Ktoré z týchto dvojíc pôsobia na seba aj elektrickými silami?
17. Ako je možné, že dva rovnobežné elektrónové lúče sa odpudzujú, pričom dva rovnobežné vodiče, v ktorých tečú súhlasne orientované prúdy, sa priťahujú?
18. Kedy pôsobí na vodič, ktorým tečie elektrický prúd a ktorý je umiestnený v magnetickom poli, nulová sila: keď je vodič rovnobežný s indukčnými čiarami, alebo keď je vodič kolmý na indukčné čiary?
19. Schematicky nakreslite sústavu magnetických indukčných čiar v okolí konca solenoidu, ktorým tečie prúd. Kvalitatívne ukážte, že na slučku, ktorej os je totožná s osou solenoidu, pôsobí v okolí konca solenoidu príťažlivá alebo odpudivá sila, v závislosti od vzájomnej orientácie prúdov v solenoide a v slučke.
20. Ukážte, že dva rôznobežné dlhé priamkové vodiče, ktoré ležia v jednej rovine a sú pretekané elektrickým prúdom, pôsobia na seba vzájomne momentmi síl, ktoré sa snažia natočiť ich tak, aby stotožnili polohu a orientáciu ich prúdov.
21. Vysvetlite, ako by bolo možné vyrobiť kompas, ak máme k dispozícii batériu, vodivý káblik, cievku s navinutým drôtom a niť.
22. V akej polohe vzhľadom na vektor magnetickej indukcie pôsobí na prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli najväčší moment sily a v akej polohe je moment sily nulový? V akej polohe má slučka nulovú, najväčšiu a najmenšiu potenciálnu energiu? Ktorá z dvoch rovnovážnych polôh je stabilná a ktorá vratká? Do akej polohy sa snaží slučka natočiť?
23. Mení sa potenciálna energia prúdovej slučky v homogénnom magnetickom poli a) pri translačnom pohybe slučky (t.j. pri posúvaní jej stredu a súčasnom zachovaní smeru jej osi) pozdĺž indukčných

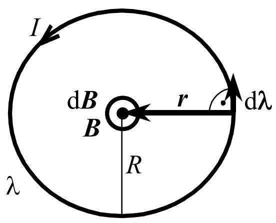
čiar poľa, b) pri translačnom pohybe slučky priečne na indukčné čiary poľa, c) pri otáčavom pohybe slučky, pri ktorom sa mení smer osi slučky?

24. Máme dve kruhové prúdové slučky s rôznymi polomermi a s totožnými stredmi. Do akej vzájomnej polohy sa slučky snažia natočiť?
25. Ako sa zväčší energia magnetického poľa elektrického obvodu, ak sa elektrický prúd v obvode zdvojnásobí?

4.3 Riešené príklady

***Poznámka**: V príkladoch* 4.1 - 4.3, 4.5 *ukážeme, ako možno určiť vektor magnetickej indukcie v okolí takých jednoduchých prúdov, ako je prúdová slučka a priamkový prúd. Výsledky z týchto príkladov sa potom využívajú v ďalších príkladoch pri riešení problémov, v ktorých sa výsledné magnetické pole elektrického obvodu dá vyjadriť ako superpozícia polí od jednoduchých prúdov. Je preto nutné, aby sme tieto príklady dobre zvládli a vedeli postup ich riešenia v prípade potreby rýchlo zopakovať. Podobne je tiež užitočné vedieť rýchlo vyjadriť magnetickú indukciu v dutine toroidu a solenoidu (príklady* 4.7 a 4.8*), pretože cievky tohto tvaru sú častým zdrojom magnetického poľa, takže tieto úlohy sa vyskytnú ako čiastkové úlohy pri riešení viacerých ďalších príkladov.*

4.1 Prúdová slučka (závit) má polomer R = 10 cm a tečie ňou prúd I = 1 A. Určte vektor magnetickej indukcie slučky v strede slučky!

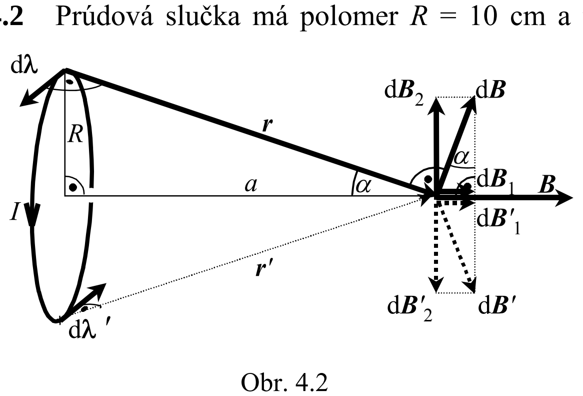


Obr. 4.1

Riešenie

Podľa Biotovho-Savartovho zákona príspevok elementárneho úseku vodiča s dĺžkou $\mathrm{d}\ell$ k magnetickej indukcii v strede slučky (obr. 4.1) je $\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$, kde vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ má rovnakú orientáciu ako prúd v slučke a $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor stredu slučky vzhľadom na polohu elementárneho úseku $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Pre ľubovoľný element $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ sú vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{r}$ vzájomne kolmé, takže elementárny príspevok $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ je vždy kolmý na nákresňu, orientovaný pred ňu a pre jeho absolútnu hodnotu platí $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\ell\, r}{r^3} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi \mathrm{R}^2}\mathrm{d}\ell$, kde sme v poslednej rovnosti využili, že $r = R$. Výsledná magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ je superpozíciou príspevkov od všetkých elementárnych úsekov. Hľadaná veľkosť magnetickej indukcie je preto $B = \int \mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi \mathrm{R}^2}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}\ell = \dfrac{\mu_0 I}{2R} = 6{,}28\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$. Vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na nákresňu a orientovaný pred ňu. Je užitočné si zapamätať, že vektor $\boldsymbol{B}$ má rovnakú orientáciu ako postup pravotočivej skrutky (vývrtky), ktorá sa otáča súhlasne s prúdom v slučke.

4.2 Prúdová slučka má polomer R = 10 cm a tečie ňou prúd I = 1 A. Určte vektor magnetickej indukcie slučky na osi slučky vo vzdialenosti $a = 20$ cm od jej stredu! Overte, že v prípade $a = 0$ cm (stred slučky) je výraz pre magnetickú indukciu totožný s výsledkom príkladu 4.1.



Obr. 4.2

Riešenie

Zvoľme na slučke dva elementárne úseky $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'$ so vzájomne symetrickou polohou vzhľadom na stred slučky (obr.4.2). Podľa Biotovho-Savartovho zákona príspevok elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ k magnetickej indukcii na osi slučky v bode s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$

vzhľadom na element d$\boldsymbol{\ell}$ je $\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$. Keďže vektory d$\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{r}$ sú vzájomne kolmé, v absolútnych hodnotách platí $\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell\, r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}$. Príspevok elementu d$\boldsymbol{\ell}'$ je $\mathrm{d}\boldsymbol{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'\times\boldsymbol{r}'}{r'^3}$.
Z obrázku je zrejmé, že priemety vektorov d$\boldsymbol{B}$, d$\boldsymbol{B}'$ do smeru osi slučky, označené ako $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1$, $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1'$, sa sčítavajú, priemety do smeru kolmého na os slučky, označené ako $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$, $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2'$, sa vzájomne rušia. K celkovej magnetickej indukcii slučky prispieva teda z vektora d$\boldsymbol{B}$ iba jeho priemet d$\boldsymbol{B}_1$, ktorého veľkosť je $\mathrm{d}B_1 = \mathrm{d}B\sin\alpha = \mathrm{d}B\frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3}\mathrm{d}\ell$. Veľkosť celkovej magnetickej indukcie slučky v danom bode je súčet príspevkov od všetkých elementov dℓ, čo vyjadruje integrál $B = \int \mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}\ell = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}$. Podľa obrázku platí $r = \sqrt{R^2 + a^2}$, preto $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 5{,}62\cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}$,

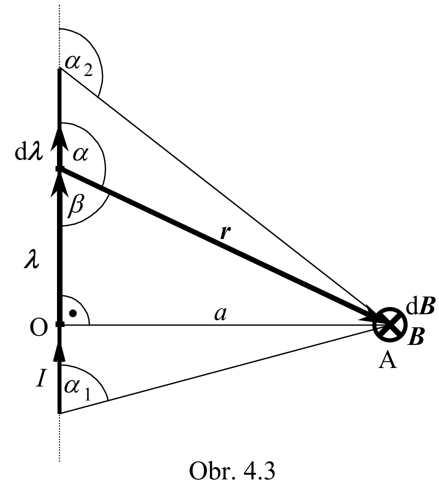
čo je hľadaný výsledok. Vektor $\boldsymbol{B}$ leží v osi slučky a má na celej osi (t.j. na oboch stranách slučky) rovnakú orientáciu, ktorá je, rovnako ako v príklade 4.1, totožná s postupom pravotočivej skrutky, ktorá sa otáča súhlasne s prúdom v slučke.

V prípade $a = 0$ cm je $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$, čo je výsledok totožný s výsledkom príkladu 4.1.

Určenie tejto limity je užitočné ako kontrola správnosti všeobecného výsledku.

4.3 Priamym úsekom vodiča tečie prúd *I*. Určte príspevok tohto úseku k celkovej magnetickej indukcii obvodu v bode A (obr. 4.3), ktorého poloha je určená jeho kolmou vzdialenosťou od vodiča *a* a uhlami α_1, α_2, ktoré s orientovanou priamkou prúdovodiča (úseku) zvierajú spojnice počiatočného a koncového bodu úseku s bodom A.

Riešenie



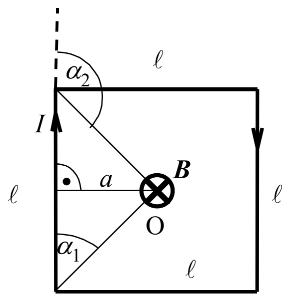
Obr. 4.3

Zvoľme elementárny úsek prúdovodiča d$\boldsymbol{\ell}$ s polohovým vektorom $\boldsymbol{\ell}$ vzhľadom na bod O (obr. 4.3). Jeho príspevok k magnetickej indukcii v bode A je podľa Biotovho-Savartovho zákona $\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$. Z tohto vzťahu vyplýva, že vektor d$\boldsymbol{B}$ je kolmý na nákresňu a je orientovaný do nákresne. To platí pri ľubovoľne zvolenom elemente d$\boldsymbol{\ell}$ na danom prúdovodiči, preto výsledný vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ bude tiež kolmý na nákresňu a bude orientovaný do nej.
V absolútnych hodnotách platí:
$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell\, r\sin\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha}{r^2}\mathrm{d}\ell$, kde α je uhol medzi vektormi d$\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{r}$. Pri posúvaní elementárneho úseku dℓ po prúdovodiči sa súčasne menia r aj α. Aby bolo možné integrovať dB, je potrebné ho vyjadriť ako funkciu iba jednej nezávislej premennej. Najvýhodnejšie je zvoliť za nezávisle premennú uhol α a pomocou nej vyjadriť r a dℓ. Dĺžku r vyjadríme zo vzťahov v pravouhlom trojuholníku so stranami a, ℓ a r, kde platí $r = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, lebo $\sin\beta = \sin\alpha$. Kvôli vyjadreniu dℓ treba najprv poznať výraz pre ℓ. V tom istom trojuholníku platí $\ell = \frac{a}{\mathrm{tg}\beta} = -\frac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$, lebo $\mathrm{tg}\beta = -\mathrm{tg}\alpha$, takže $\mathrm{d}\ell = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{a}{\mathrm{tg}^2\alpha}\frac{1}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{a}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$.
S využitím týchto vzťahov dostávame vzťah pre dB ako funkciu α:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi\left(\dfrac{a}{\sin\alpha}\right)^2}\frac{a}{\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi a}\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Hľadaná magnetická indukcia v bode A od celého úseku prúdovodiča je súčet všetkých elementárnych príspevkov: $B = \int \mathrm{d}B = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi a}\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$. Vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na nákresňu a orientovaný do nej.

4.4 Vypočítajte veľkosť magnetickej indukcie v strede štvorcovej slučky so stranou $\ell = 5$ cm, ak ňou tečie prúd $I = 2$ A.



Obr. 4.4

Riešenie

Magnetickú indukciu v strede slučky O možno určiť ako superpozíciu štyroch (v dôsledku symetrie rovnakých) príspevkov od jednotlivých strán štvorca. Problém príspevku priameho úseku prúdovodiča rieši všeobecne príklad 4.3. Podľa jeho výsledku je veľkosť príspevku jednej strany štvorca $B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$, kde a je vzdialenosť bodu O od strany štvorca a α_1 , α_2 označujú uhly, ktoré s orientovanou priamkou prúdovodiča (strany) zvierajú spojnice koncov strany s bodom O. Vektor $\boldsymbol{B}_1$, rovnako ako príspevky od ostatných troch strán v bode O, je kolmý na rovinu štvorca a je orientovaný do nákresne. (To vyplýva z Biotovho-Savartovho zákona pre ľubovoľný elementárny úsek prúdovodiča slučky). Podľa obr. 4.4 platí $a = \frac{\ell}{2}$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$. S využitím týchto vzťahov hľadaná veľkosť magnetickej indukcie v strede štvorca je:

$$B = 4B_1 = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{\ell}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\mu_0 I}{\pi\ell}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi\ell} = 4{,}53\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}.$$

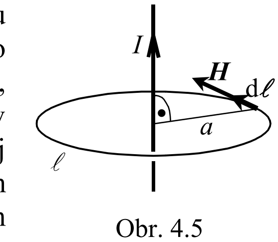
Vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na rovinu štvorca a je orientovaný do nákresne.

4.5 Nekonečne dlhým priamym vodičom tečie prúd $I = 1$ A. Určte vektor magnetickej indukcie magnetického poľa vytvoreného týmto prúdom vo vzdialenosti $a = 10$ cm od vodiča! Výpočet urobte dvomi metódami: a) s využitím Biotovho-Savartovho zákona, b) s využitím Ampérovho zákona.

Riešenie

a) Pri prvej metóde musíme najprv zopakovať celý postup príkladu 4.3, čím dostaneme výsledok $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$, kde α_1, α_2 (obr.4.3) označujú uhly, ktoré s orientovanou priamkou prúdovodiča zvierajú spojnice počiatočného a koncového bodu prúdovodiča s bodom, v ktorom určujeme magnetickú indukciu. V limitnom prípade nekonečne dlhého vodiča je $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, preto hľadaná veľkosť magnetickej indukcie je $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos 0 - \cos\pi\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(1+1\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$. Pre smer a orientáciu vektora $\boldsymbol{B}$ pozri príklad 4.3.

b) Podľa Ampérovho zákona pre ľubovoľnú integračnú dráhu ℓ obopínajúcu prúdovodič platí $\oint\limits_{\ell} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I$. Z tejto integrálnej rovnice vieme určiť veľkosť intenzity magnetického poľa H iba vtedy, ak vo všetkých bodoch integračnej dráhy poznáme smer vektora intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ a ak máme informácie (z geometrických úvah o symetrii skúmaného magnetického poľa) o tom, že jeho veľkosť H je na integračnej dráhe (celej alebo po častiach) konštantná. Údaje o smere a orientácii vektora $\boldsymbol{H}$ získame iba z Biotovho-Savartovho zákona, preto ani pri výpočte pomocou Ampérovho zákona sa v počiatočnej fáze riešenia bez neho nezaobídeme. Pre náš prípad sme už pomocou neho smer a orientáciu vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ určili v príklade 4.3. Vektor $\boldsymbol{H}$ má rovnaký smer a rovnakú orientáciu ako $\boldsymbol{B}$, lebo $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$. Priestorovo je vodič s vektorom $\boldsymbol{H}$ znázornený na obr.4.5.



Obr. 4.5

Teraz treba vhodne zvoliť integračnú dráhu ℓ tak, aby mala rovnakú symetriu ako magnetické pole. Magnetické pole prúdovodiča má takú istú symetriu ako prúdovodič, má teda v prípade priameho vodiča aj rotačnú symetriu okolo osi, ktorú tvorí prúdovodič. Ako krivka s takouto symetriou sa ponúka kružnica v rovine kolmej na vodič, so stredom na vodiči a s polomerom a. Z rotačnej symetrie vyplýva, že na celej kružnici má $\boldsymbol{H}$ konštantnú veľkosť H. Okrem toho z vyššie určeného smeru a orientácie $\boldsymbol{H}$ vyplýva, že vo všetkých bodoch kružnice je element integračnej dráhy $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{H}$, takže $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = H\,\mathrm{d}\ell$. Integrál v Ampérovom zákone preto možno písať $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi a} H \mathrm{d}\ell = H \int_0^{2\pi a} \mathrm{d}\ell = H \cdot 2\pi a$.

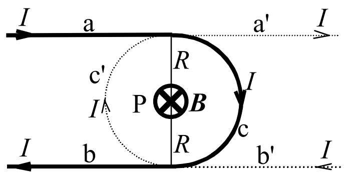
Podľa Ampérovho zákona teraz $H\, 2\pi\, a = I$, odkiaľ $H = \dfrac{I}{2\pi a}$. Hľadaná veľkosť magnetickej indukcie je

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}.$$

***Poznámka**: Postup (b) je matematicky jednoduchší. Vo všeobecnosti vždy, keď má magnetické pole takú symetriu, že možno nájsť integračnú dráhu, na ktorej je intenzita magnetického poľa aspoň po častiach konštantná, je tento postup jednoduchší a vedie rýchlejšie k výsledku. Najprv je však v každom prípade nutné určiť smer a orientáciu **B** z Biotovho-Savartovho zákona.*

4.6 Nekonečný vodič, ktorým tečie prúd $I = 5$ A, je ohnutý do tvaru U podľa obr. 4.6. Polomer ohybu je $R = 10$ cm. Určte vektor magnetickej indukcie v strede ohybovej kružnice P!

Riešenie



Obr. 4.6

Podľa Biotovho-Savartovho zákona majú príspevky $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ k magnetickej indukcii od všetkých elementov $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ smer kolmý na nákresňu a sú orientované do nákresne, preto rovnaký smer a rovnakú orientáciu bude mať aj výsledný vektor $\boldsymbol{B}$. Celý prúdovodič možno chápať ako zložený z troch častí, dvoch polpriamok a, b a polkružnice c, a výsledné magnetické pole ako superpozíciu polí od týchto jednotlivých častí.

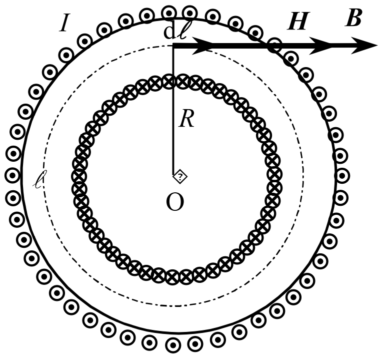
Magnetickú indukciu od polpriamky možno určiť dvoma spôsobmi. Prvý (matematicky dôslednejší) spôsob je využitie výsledku príkladu 4.3, čo predpokladá, že tento pomerne zložito získaný výsledok poznáme alebo si ho vieme odvodiť z Biotovho-Savartovho zákona. Tu použijeme tentoraz druhý, jednoduchší spôsob. Využijeme fakt, že v prípade nekonečne dlhého priameho prúdovodiča vieme magnetickú indukciu ľahko určiť pomocou Ampérovho zákona (príklad 4.5b). Ak si nekonečný vodič predstavíme ako zložený z dvoch polpriamok, z dôvodov symetrie môžeme povedať, že každá polpriamka prispieva k výslednej magnetickej indukcii polovicou. Keďže podľa výsledku príkladu 4.5b magnetická indukcia od polpriamok a, b predĺžených na priamky aa′, bb′ je $B_{\mathrm{aa'}} = B_{\mathrm{bb'}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$, príspevky od samotných polpriamok a, b sú

$$B_{\mathrm{a}} = B_{\mathrm{b}} = \frac{B_{\mathrm{aa'}}}{2} = \frac{B_{\mathrm{bb'}}}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Aj magnetickú indukciu od polkružnice možno určiť dvoma spôsobmi. Prvý spôsob je priama aplikácia Biotovho-Savartovho zákona s integrovaním všetkých príspevkov od polkružnice. Druhý, rýchlejší spôsob spočíva na podobnej úvahe ako pri polpriamke: ak si kružnicu predstavíme ako zloženú z dvoch polkružníc, z dôvodov symetrie môžeme povedať, že každá polkružnica prispieva k výslednej magnetickej indukcii polovicou. Keďže podľa výsledku príkladu 4.1 magnetická indukcia od polkružnice c doplnenej na kružnicu cc′ je $B_{cc'} = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$, príspevok od samotnej polkružnice c je $B_c = \dfrac{B_{cc'}}{2} = \dfrac{\mu_0 I}{4R}$. Hľadaná celková magnetická indukcia je:

$$B = B_a + B_b + B_c = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I(2+\pi)}{4\pi R} = 5{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{T}.$$

4.7 Máme toroid s malým prierezom (pozri Otázky a problémy, úlohu č. 7), s počtom závitov $N = 800$, ktorým tečie prúd $I = 500$ mA. Stredný polomer prstenca (vzdialenosť kruhovej osi dutiny prstenca od stredu prstenca) je $R = 10$ cm. Vypočítajte veľkosť intenzity magnetického poľa a magnetickej indukcie toroidu na kruhovej osi dutiny!



Obr. 4.7

Riešenie

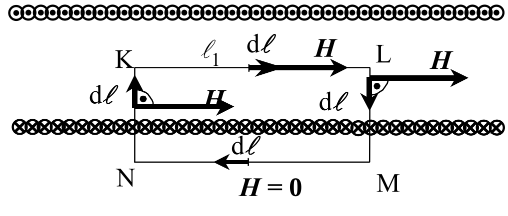
Najprv musíme určiť z Biotovho-Savartovho zákona smer a orientáciu vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ a intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$. Podľa výsledku príkladu 4.1 ľubovoľný závit toroidu vytvára vo svojom strede magnetickú indukciu kolmú na rovinu závitu a orientovanú zhodne s postupom pravotočivej skrutky, ktorá sa otáča súhlasne s prúdom v závite. Ďalšie závity prispievajú v tomto bode magnetickou indukciou, ktorej výslednica pre každú dvojicu závitov so symetrickými polohami vzhľadom na rovinu skúmaného závitu má v dôsledku symetrie opäť smer kolmý ma tento závit a orientáciu rovnakú ako magnetická indukcia samotného závitu. Na kruhovej osi dutiny toroidu má preto vektor $\boldsymbol{B}$ všade smer dotyčnice k tejto osi a je orientovaný podľa obr. 4.7. Vektor $\boldsymbol{H}$ má rovnaký smer a rovnakú orientáciu, pretože $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$.

V dôsledku rotačnej symetrie toroidu (a teda aj jeho magnetického poľa) vzhľadom na priamkovú os kolmú na rovinu prstenca a prechádzajúcu jeho stredom O musí byť veľkosť vektorov $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ v každom bode na kruhovej osi dutiny toroidu rovnaká. To nám umožňuje určiť H pomocou Ampérovho zákona. Ako integračnú dráhu ℓ zvoľme kruhovú os dutiny. Podľa Ampérovho zákona platí $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = N I$, lebo kruhovú plochu obopnutú kružnicou ℓ pretína vodič vinutia N-krát. Vektory $\boldsymbol{H}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ sú rovnobežné a hodnota H, ako sme už spomenuli, je konštantná pozdĺž celej integračnej dráhy, preto pre integrál na ľavej strane rovnice platí $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi R} H\,\mathrm{d}\ell = H \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}\ell = H\,2\pi R$. Rovnica je teraz $H\,2\pi R = N I$, odkiaľ dostávame hľadanú veľkosť intenzity magnetického poľa $H = \dfrac{N I}{2\pi R} = 637\ \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$. Hľadaná veľkosť magnetickej indukcie je $B = \mu_0 H = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi R} = 8{,}00 \cdot 10^{-4}$ T.

4.8 Určte veľkosť intenzity magnetického poľa a magnetickej indukcie v strede tenkého a dlhého (v limitnom prípade nekonečne dlhého) solenoidu s dĺžkovou hustotou závitov $N_0 = 1000\ \text{m}^{-1}$, keď cez závity tečie prúd $I = 1$ A.

Riešenie

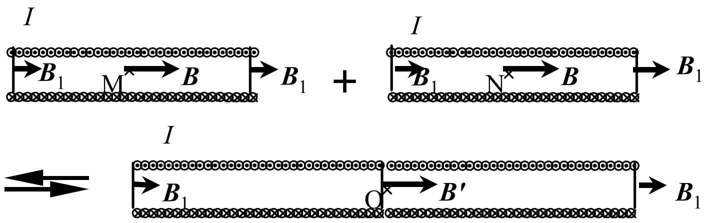
Smer a orientáciu vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ a intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ treba určiť z Biotovho-Savartovho zákona. Podľa výsledku príkladu 4.1 ľubovoľný závit solenoidu vytvára vo svojom strede magnetickú indukciu kolmú na rovinu závitu a orientovanú zhodne s postupom pravotočivej skrutky,



Obr. 4.8

ktorá sa otáča súhlasne s prúdom v závite. Ďalšie závity prispievajú podľa výsledku príkladu 4.2 v tomto bode magnetickou indukciou s rovnakým smerom a rovnakou orientáciou. Nielen v strede závitu, ale v každom bode roviny závitu v dutine má indukcia rovnaký smer, lebo výslednica príspevkov každej dvojice závitov so symetrickými polohami vzhľadom na rovinu závitu má v dôsledku symetrie v každom bode roviny skúmaného závitu smer kolmý ma túto rovinu. Výsledný vektor $\boldsymbol{H}$ má preto všade v dutine smer pozdĺžnej osi dutiny a je orientovaný podľa obr. 4.8. Ak je solenoid nekonečne dlhý, všetky priečne prierezy sú ekvivalentné, preto sa H pozdĺž osi solenoidu nemení. To nám umožňuje využiť na určenie H v dutine Ampérov zákon $\oint_\ell \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = NI$. Zvoľme ako integračnú dráhu obdĺžnik KLMN (obr. 4.8), ktorého strana $\overline{KL}$ leží na osi dutiny a strana $\overline{MN}$ sa nachádza mimo dutiny. Označme dĺžku týchto strán $|\overline{KL}| = |\overline{MN}| = \ell_1$. Krivkový integrál na ľavej strane rovnice možno písať ako súčet štyroch integrálov: $\oint_\ell \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_K^L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_L^M \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_M^N \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_N^K \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Na úseku $\overline{KL}$ v dutine sú vektory $\boldsymbol{H}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ rovnobežné a H je na celom úseku konštantné, preto $\int_K^L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_K^L H\,\mathrm{d}\ell = \int_0^{\ell_1} H\,\mathrm{d}\ell = H\ell_1$. Na úseku $\overline{MN}$, mimo dutiny solenoidu, je veľkosť intenzity magnetického poľa H v porovnaní s dutinou zanedbateľná. K takému záveru môžeme dôjsť, ak poznáme tvar indukčných čiar magnetického poľa solenoidu: z vonkajšej strany vinutia sú indukčné čiary veľmi riedke, čo zodpovedá veľmi malej hodnote magnetickej indukcie a teda aj veľmi malej hodnote intenzity magnetického poľa v týchto miestach. Preto v porovnaní s predchádzajúcim integrálom možno príspevok úseku $\overline{MN}$ k celkovému integrálu zanedbať a písať $\int_M^N \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$. Na úsekoch $\overline{LM}$ a $\overline{NK}$ je vektor $\boldsymbol{H}$ kolmý na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a navyše mimo dutiny je jeho veľkosť zanedbateľne malá, takže $\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$, čo vedie k nulovým integrálom $\int_L^M \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_N^K \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$. Vidíme, že všetky príspevky okrem úseku $\overline{KL}$ sú nulové. Vodič vinutia pretína plochu obdĺžnika KLMN N-krát, kde $N = N_0\,\ell_1$. Ampérov zákon možno preto písať v tvare $H\ell_1 = N_0\,\ell_1 I$, odkiaľ pre hľadanú veľkosť intenzity magnetického poľa v strede dutiny dostávame výraz $H = N_0 I = 1000\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$. Hľadaná veľkosť magnetickej indukcie v strede dutiny je $B = \mu_0 H = \mu_0 N_0 I = 1{,}26\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$.

4.9 Dokážte, že na konci veľmi dlhého solenoidu sa magnetická indukcia rovná polovici magnetickej indukcie v jeho strede.

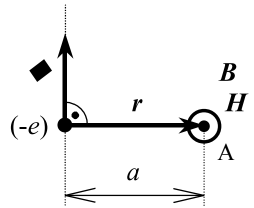


Obr. 4.9

Riešenie

Pre daný solenoid je magnetická indukcia, ktorú solenoid, pretekaný prúdom, vytvára, z dôvodov symetrie na obidvoch jeho koncoch rovnaká a v strede prierezu má smer pozdĺžnej osi solenoidu. Označme magnetickú indukciu v strede solenoidu $\boldsymbol{B}$, na koncoch solenoidu $\boldsymbol{B}_1$ (obr. 4.9). Predstavme si teraz dva rovnaké solenoidy, pretekané rovnakým prúdom, ktoré priložíme koncami k sebe tak, aby prúd vo vinutiach oboch solenoidov bol orientovaný súhlasne. Vznikne tak solenoid s dvojnásobnou dĺžkou. V bode spojenia oboch solenoidov O, ktorý je stredom nového solenoidu, je podľa zákona superpozície magnetická indukcia $\boldsymbol{B}' = 2\boldsymbol{B}_1$. Ak sú solenoidy pri danom priereze veľmi (v limite nekonečne) dlhé, z hľadiska magnetickej indukcie sú body M, N, O rovnocenné, lebo každý z nich je stredom veľmi dlhého solenoidu, kde magnetická indukcia závisí iba od dĺžkovej hustoty závitov a od prúdu v nich (pozri príklad 4.8). Platí preto $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$, s využitím predchádzajúcej rovnosti $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{B}_1$. Odtiaľ $\boldsymbol{B}_1 = \dfrac{\boldsymbol{B}}{2}$, čo sme mali dokázať.

4.10 Určte intenzitu magnetického poľa, ktorú vytvára elektrón urýchlený napätím U = 200 V v bode, ktorého vzdialenosť od elektrónu v smere kolmom na vektor rýchlosti elektrónu je $a = 10\ \mu\mathrm{m}$.



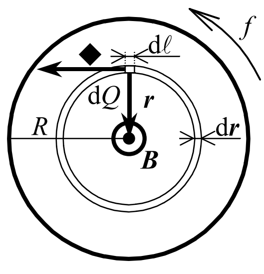
Obr. 4.10

Riešenie

Elektrón, urýchlený v elektrickom poli, sa pohybuje rýchlosťou v, ktorej veľkosť môžeme určiť zo zákona zachovania mechanickej energie v elektrickom poli $E_{p0} + E_{k0} = E_p + E_k$, kde počiatočná potenciálna energia je $E_{p0} = 0$, konečná $E_p = (-e)U$, počiatočná kinetická energia je $E_{k0} = 0$, konečná $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, pričom e (e > 0) označuje elementárny náboj a m hmotnosť elektrónu. Možno preto písať rovnicu $0 + 0 = (-e)U + \frac{1}{2}mv^2$, z ktorej $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$.

Magnetická indukcia, ktorú elektrón vytvára v bode A, je $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{(\boldsymbol{-e})\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ (obr.4.10). Vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na nákresňu a orientovaný pred ňu, lebo záporné znamienko mení orientáciu vektorového súčinu. Vektory v a $\boldsymbol{r}$ sú sú vzájomne kolmé a $r = a$, preto pre absolútne hodnoty platí $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{ev}{r^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{evr}{r^3} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{ev}{a^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{e}{a^2}\sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$. Hľadaná veľkosť intenzity magnetického poľa je $H = \dfrac{B}{\mu_0} = \dfrac{e}{4\pi a^2}\sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = 2{,}39\cdot 10^{-3}\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$. Vektor $\boldsymbol{H}$ je kolmý na nákresňu a orientovaný pred ňu.

4.11 *Kladný elektrický náboj Q = 1 nC je homogénne rozložený na kruhovej doske s polomerom $R = 20\ \mathrm{cm}$. Určte vektor magnetickej indukcie, ktorá sa vytvorí v strede dosky v dôsledku otáčania dosky okolo jej osi s frekvenciou f = 20 Hz.



Obr. 4.11

Riešenie

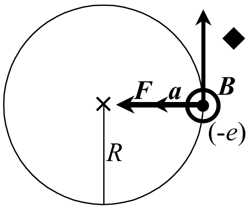
Plošná hustota náboja na doske je $\sigma = \dfrac{Q}{\pi R^2}$. Zvoľme na doske elementárne medzikružie s polomerom r, so šírkou dr, a na ňom úsek s elementárnou dĺžkou dℓ (obr. 4.11). Na elementárnej plôške $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\ell$ sa nachádza náboj $\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\ell = \dfrac{Q}{\pi R^2}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\ell$. Tento náboj sa pohybuje rýchlosťou v, ktorej veľkosť je $v = \omega r = 2\pi f r$, a jeho príspevok k magnetickej indukcii v strede dosky je $\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathrm{d}Q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$. Vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$ sú vzájomne kolmé, preto pre absolútne hodnoty platí $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathrm{d}Q\,v\,r}{r^3} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathrm{d}Q\,v}{r^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\dfrac{Q}{\pi R^2}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\ell\,2\pi f r}{r^2} = \dfrac{\mu_0 Q f}{2\pi R^2 r}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\ell$. Príspevky d$\boldsymbol{B}$ všetkých plošných elementov dosky majú rovnaký smer a rovnakú orientáciu. Hľadaná výsledná veľkosť magnetickej indukcie v strede dosky je preto súčtom veľkostí všetkých príspevkov:

$$B=\int_{r=0}^{R}\int_{\ell=0}^{2\pi r}\frac{\mu_0 Q f}{2\pi R^2 r}\mathrm{d}\ell\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Qf}{2\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\left(\frac{1}{r}\int_{\ell=0}^{2\pi r}\mathrm{d}\ell\right)\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Q f}{2\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\frac{2\pi r}{r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Q f}{R^2}\int_{r=0}^{R}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Q f}{R}=1{,}26\cdot 10^{-13}\ \mathrm{T}$$

Vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na rovinu dosky a orientovaný zhodne s postupom pravotočivej skrutky, ktorá sa otáča súhlasne s doskou.

4.12 Elektrón urýchlený z pokojového stavu napätím U = 200 V vletel do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou B = 10 mT kolmo na smer indukčných čiar. Určte polomer kružnice, po ktorej sa bude elektrón pohybovať.

Riešenie



Obr. 4.12

Napätie U urýchli elektrón na rýchlosť $v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}$ (pozri príklad 4.10), kde e je elementárny náboj a m je hmotnosť elektrónu. V magnetickom poli pôsobí na pohybujúci sa náboj magnetická sila (Lorentzova sila s nulovou elektrickou zložkou, lebo intenzita elektrického poľa je v tomto prípade nulová) $\boldsymbol{F}=(-e)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ (obr. 4.12). Na elektrón pôsobí tiež jeho tiaž, možno však ľahko ukázať, že táto je v porovnaní s $\boldsymbol{F}$ zanedbateľná. (*Dokážte ako cvičenie*!) Silu $\boldsymbol{F}$ možno preto považovať za výslednú silu pôsobiacu na elektrón. Podľa druhého Newtonovho zákona udeľuje výsledná sila elektrónu zrýchlenie $\boldsymbol{a}$, pre ktoré platí $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$. V momente, keď elektrón vletí do magnetického poľa, je vektor zrýchlenia $\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}=\frac{(-e)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{m}$ kolmý na vektor okamžitej rýchlosti v (vyplýva to z vlastností vektorového súčinu) a teda aj na dotyčnicu k trajektórii elektrónu, čo znamená, že má nenulovú normálovú zložku a nulovú tangenciálnu zložku. V dôsledku toho bude trajektória elektrónu zakrivená, pričom veľkosť jeho rýchlosti sa nezmení. Zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ je kolmé na vektor $\boldsymbol{B}$, preto vektor v ostane v pôvodnej rovine kolmej na $\boldsymbol{B}$, takže trajektória bude ležať v rovine kolmej na $\boldsymbol{B}$. Dôsledkom toho, že vektory v a $\boldsymbol{B}$ ostanú vzájomne kolmé je, že stále bude platiť $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}|=vB$, takže veľkosť normálového zrýchlenia bude $a=\frac{evB}{m}$ a počas pohybu sa nebude meniť. Výsledná trajektória je preto kružnica v rovine kolmej na $\boldsymbol{B}$. Dostredivé zrýchlenie súvisí s polomerom kružnice vzťahom $a=\frac{v^2}{R}$, možno preto písať rovicu $\frac{evB}{m}=\frac{v^2}{R}$, odkiaľ pre hľadaný polomer kružnice dostávame:

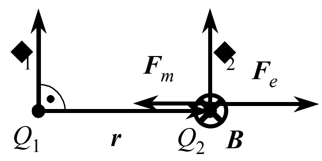
$$R=\frac{mv}{eB}=\frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}=4{,}77\ \mathrm{mm}\,.$$

4.13 Porovnajte magnetické príťažlivé sily a elektrické odpudivé sily pôsobiace v pohybujúcom sa rovnobežnom zväzku elektricky nabitých častíc s rovnakým znamienkom. S využitím vzťahu pre rýchlosť svetla vo vákuu $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, ktorý je známy z teórie elektromagnetického poľa, ukážte, že magnetická sila nikdy nemôže prevýšiť elektrickú silu.

Riešenie

Predstavme si dva rovnobežne letiace kladné ióny s rovnakými elektrickými nábojmi Q_1, Q_2 $(Q_1=Q_2=Q)$, s rovnakými rýchlosťami v_1, v_2 $(\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v})$, nachádzajúce sa na kolmej spojnici ich trajektórií (obr. 4.13). Nech vzdialenosť medzi iónmi je r. Prvý ión vytvára svojím pohybom v bode, kde sa nachádza druhý ión, magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q_1\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{r}}{r^3}$, kolmú na nákresňu a orientovanú do nej. Vektory v_1 a $\boldsymbol{r}$ sú vzájomne kolmé, preto jej veľkosť je $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q_1 v_1}{r^2}$. V tomto magnetickom poli pôsobí na druhý ión magnetická sila $\boldsymbol{F}_m = Q_2 \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B}$, orientovaná do stredu zväzku. Upozorňujeme, že táto sila má smer spojnice nábojov iba v špeciálnom prípade, keď sa náboje nachádzajú na kolmej spojnici ich trajektórií (*pozri Otázky a úlohy, úlohu č. 11 a poznámku k nej*). Vzhľadom na kolmosť vektorov v_2 a $\boldsymbol{B}$ je veľkosť magnetickej sily:

$$F_m = Q_2 v_2 B = Q_2 v_2 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q_1 v_1}{r^2} = \frac{\mu_0 Q_1 Q_2 v_1 v_2}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{4\pi r^2}.$$



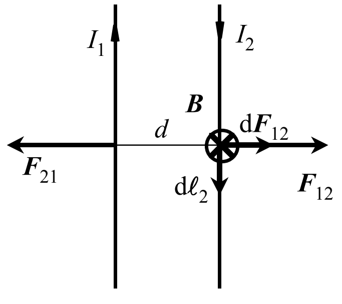
Obr. 4.13

Elektrická Coulombova sila, pôsobiaca na druhý ión, je $\boldsymbol{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2 \boldsymbol{r}}{r^3}$. Táto sila je odpudivá vzhľadom na prvý ión. Jej veľkosť je $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$. Pomer síl F_m a F_e je $\frac{F_m}{F_e} = \frac{\frac{\mu_0 Q^2 v^2}{4\pi r^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}} = \varepsilon_0 \mu_0 v^2$, čo je hľadaný výsledok. Z rovnice v zadaní vyplýva vzťah $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

S jeho využitím možno písať $\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2}$. Častice s nenulovou pokojovou hmotnosťou sa môžu pohybovať iba rýchlosťou menšou než je rýchlosť svetla vo vákuu, čiže vždy platí $v < c$. Z toho vyplýva, že vždy platí $\frac{F_m}{F_e} < 1$, t.j. príťažlivé magnetické sily sú vždy slabšie než odpudivé elektrické sily, čo sme mali dokázať.

***Poznámka**: Výsledná Lorentzova sila $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m$, pôsobiaca na časticu vo zväzku, je podľa tohto výsledku vždy odpudivá, v dôsledku čoho má zväzok rovnakých nabitých častíc tendenciu sa rozbiehať. Možno ho však sústrediť vonkajším magnetickým poľom (pozri príklad 4.50).*

4.14 Dvoma dlhými, priamymi, rovnobežnými vodičmi tečú navzájom opačne orientované prúdy s veľkosťami $I_1 = 10\ \text{A}$, $I_2 = 20\ \text{A}$. Vzdialenosť medzi vodičmi je $d = 10\ \text{cm}$. Nájdite smer, orientáciu a veľkosť sily pôsobiacej na $\ell = 1\ \text{m}$ dĺžky každého vodiča. Ako sa zmení táto sila, ak zmeníme orientácia prúdu v jednom z vodičov?



Obr. 4.14

Riešenie

Ak sú vodiče dostatočne dlhé v porovnaní so vzdialenosťou medzi nimi, môžeme ich pokladať za nekonečné a aplikovať na ne výsledok príkladu 4.5. Podľa neho prúd I_1 (obr. 4.14) vytvára v mieste druhého vodiča magnetickú indukciu s veľkosťou $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$, kolmú na nákresňu a orientovanú do nej. Na elementárny úsek druhého vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2$, orientovaný súhlasne s prúdom I_2, pôsobí v magnetickom poli prvého vodiča odpudivá sila $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = I_2\, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2 \times \boldsymbol{B}_1$. Vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2$ a $\boldsymbol{B}_1$ sú vzájomne kolmé, preto v absolútnych hodnotách:

$\mathrm{d}F_{12} = I_2\, \mathrm{d}\ell_2\, B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\mathrm{d}\ell_2$. Hľadaná sila pôsobiaca na úsek druhého vodiča s dĺžkou ℓ je súčet elementárnych príspevkov, $F_{12} = \int \mathrm{d}F_{12} = \int_0^{\ell} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\mathrm{d}\ell_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d} = 4\cdot 10^{-4}\ \text{N}$. Vektor $\boldsymbol{F}_{12}$ leží v rovine vodičov a sila je vzhľadom na prvý vodič odpudivá.

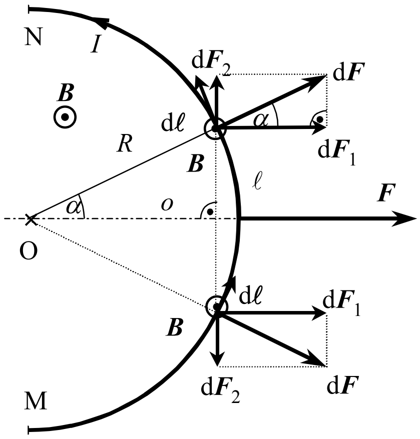
Pokiaľ ide o silu $\boldsymbol{F}_{21}$, pôsobiacu na úsek prvého vodiča s dĺžkou ℓ, možno ju určiť podobným postupom, ako bolo ukázané vyššie, t.j. tak, že hľadáme silu $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21} = I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{B}_2$, pôsobiacu na elementárny úsek prvého vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1$ v magnetickom poli druhého vodiča s veľkosťou magnetickej indukcie $B_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$ a integrujeme všetky príspevky. Výsledná sila je $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$, t.j. je rovnako veľká ako sila $\boldsymbol{F}_{12}$ a odpudivá vzhľadom na druhý vodič. (K tomuto výsledku sme mohli dôjsť aj rýchlejšie, ak uvážime, že rozloženie prúdov v priestore má bodovú symetriu vzhľadom na stred spojnice d na obr. 4.14, ak spojnicu nakreslíme v strede dĺžky vodičov. Rovnakú symetriu musia mať aj dôsledky prítomnosti týchto prúdov, t.j. magnetické pole v ich okolí a sily, ktoré s ním súvisia.)

Ak rovnaký postup zopakujeme pri zmenenej orientácii hociktorého z prúdov I_1, I_2 , t.j. keď prúdy vo vodičoch sú orientované súhlasne, dostaneme rovnako veľké sily ako v predchádzajúcom prípade, ale s opačnou orientáciou, čiže vodiče sa v tomto prípade priťahujú.

***Poznámka**: Je užitočné si zapamätať všeobecný výsledok, že súhlasne orientované prúdovodiče sa priťahujú, nesúhlasne orientované sa odpudzujú.*

4.15 *Úsek pevného drôtu má tvar polkružnice s polomerom R a tečie ním prúd I. Drôt sa nachádza v homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je kolmý na rovinu polkružnice. Určte silu pôsobiacu na úsek drôtu!

Riešenie



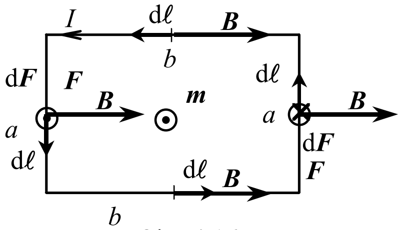
Obr. 4.15

Na elementárny úsek vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ (obr. 4.15) pôsobí sila $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$ s veľkosťou $\mathrm{d}F = I\,\mathrm{d}\ell\,B$, lebo vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{B}$ sú vzájomne kolmé. Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ má radiálny smer, t.j. priamka, pozdĺž ktorej sila pôsobí, prechádza stredom O kružnice, na ktorú sme doplnili skúmanú polkružnicu. Rozložme $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ do dvoch kolmých smerov, do smeru rovnobežného s osou symetrie o polkružnice a do smeru kolmého na túto os. Pre každú dvojicu elementárnych úsekov $\mathrm{d}\ell$ symetricky položených vzhľadom na os o sa priemety $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2$ kolmé na o vzájomne vyrušia, takže k výslednej sile $\boldsymbol{F}$ prispievajú iba priemety $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1$ rovnobežné s osou o a výsledná sila má smer osi o. Veľkosť výslednej sily je súčet všetkých elementárnych príspevkov $F = \int \mathrm{d}F_1$, kde: $\mathrm{d}F_1 = \mathrm{d}F\cos\alpha = I\,\mathrm{d}\ell\,B\cos\alpha$. V tomto výraze sú dve premenné ℓ a α, ktoré vzájomne súvisia. Aby sme mohli určiť integrál, je potrebné vyjadriť $\mathrm{d}F_1$ ako funkciu iba jednej premennej, za ktorú je výhodné zvoliť uhol α. Podľa definície uhla v radiánoch platí $\alpha = \dfrac{\ell}{R}$, preto $\ell = \alpha R$, odkiaľ $\mathrm{d}\ell = R\,\mathrm{d}\alpha$. Preto $\mathrm{d}F_1 = IBR\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ a hľadaná výsledná sila má veľkosť $F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} IBR\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = IBR\left[\sin\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2IBR$. Vektor $\boldsymbol{F}$ má smer osi polkružnice a v závislosti od orientácie prúdu a vektora magnetickej indukcie je orientovaný odstredivo alebo dostredivo vzhľadom na stred O.

4.16 V homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou $B = 0{,}2$ T je plochá obdĺžniková cievka s $N = 50$ závitmi. Rozmery cievky sú $a = 2$ cm, $b = 3$ cm. Magnetické indukčné čiary sú rovnobežné s dlhšou stranou cievky. Aký veľký moment dvojice síl pôsobí na cievku, keď ňou tečie prúd $I = 10$ mA?

Riešenie

Plochú cievku s N závitmi, vo vinutí ktorej tečie prúd I, môžeme chápať ako jednoduchú slučku, v ktorej tečie prúd NI. Moment dvojice síl pôsobiaci na cievku môžeme určiť dvoma spôsobmi:



Obr. 4.16

a) Na elementárny úsek cievky $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, orientovaný súhlasne s prúdom, pôsobí v magnetickom poli sila $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = N\,I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$. Pozdĺž strán b (obr. 4.16) sú vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{B}$ vzájomne rovnobežné, preto tu $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, t.j. na strany b sily nepôsobia. Pozdĺž strán a sú vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{B}$ kolmé, preto tu $\mathrm{d}F = N\,I\,\mathrm{d}\ell\,B$. Na celú stranu a pôsobí sila s veľkosťou: $F = \int \mathrm{d}F = \int_0^a N\,I\,B\,\mathrm{d}\ell = N\,I\,B\,a$. Sila $\boldsymbol{F}$ má smer kolmý na rovinu cievky. Na protiľahlých stranách a má $\boldsymbol{F}$ rôznu orientáciu, preto na cievku pôsobí dvojica síl s momentom $\boldsymbol{M}$. Vzdialenosť medzi priamkami, na ktorých pôsobia sily, je b, preto hľadaná veľkosť momentu sily je $M = b\,F = N\,I\,B\,a\,b = 6{,}0\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N\cdot m}$.

b) Cievka má magnetický moment $\boldsymbol{m} = N\,I\,\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{S}$ je vektor plochy cievky s veľkosťou $S = a\,b$. Vektor $\boldsymbol{m}$ má smer a orientáciu vektora plochy $\boldsymbol{S}$, je preto kolmý na rovinu cievky a orientovaný pred nákresňu. V absolútnych hodnotách je $m = N\,I\,S = N\,I\,a\,b$. Na cievku v homogénnom magnetickom poli pôsobí moment sily $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$. (Upozorňujeme, že tento vzťah je použiteľný iba v prípade, keď je magnetické pole homogénne, čo je teraz splnené.) Vektory $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{B}$ sú vzájomne kolmé, preto hľadaná veľkosť momentu sily je $M = m\,B = N\,I\,a\,b\,B$, čo je rovnaký výsledok ako pri postupe (a).

***Poznámka**: Výsledný vzťah sa nemení pri vzájomnej zámene symbolov „a“ a “ b“, čo znamená, že rovnaký moment by na cievku pôsobil, ak by magnetické indukčné čiary boli rovnobežné s kratšou stranou cievky, t.j. ak by sme cievku na obr. 4.16 otočili o 90° v rovine obrázka. Z postupu riešenia (b) dokonca vyplýva, že rovnaký moment síl by na cievku pôsobil pri ľubovoľnej polohe cievky v rovine obrázka.*

4.17 *Máme solenoid s dĺžkou $\ell = 50\ \mathrm{cm}$, s počtom závitov $N_1 = 500$, ktorým preteká prúd $I_1 = 1\ \mathrm{A}$. Vnútri solenoidu sa v jeho strede nachádza v stabilnej rovnovážnej polohe plochá štvorcová cievka s dĺžkou strany štvorca $a = 1\ \mathrm{cm}$ a s počtom závitov $N_2 = 10$, ktorou preteká prúd $I_2 = 100\ \mathrm{mA}$. Určte prácu, ktorú musí vykonať vonkajšia sila, aby vytiahla cievku zo solenoidu do takého miesta mimo solenoidu, kde už jeho magnetické pole možno zanedbať.

Riešenie

Plochú cievku s N_2 závitmi, vo vinutí ktorej tečie prúd I_2, môžeme chápať ako jednoduchú slučku, v ktorej tečie prúd $N_2\,I_2$. Stabilná rovnovážna poloha cievky v dutine solenoidu z hľadiska natočenia cievky vzhľadom na magnetické pole je poloha, v ktorej má minimálnu hodnotu potenciálna energia cievky $E_p = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{m}$ je magnetický moment cievky a $\boldsymbol{B}$ je magnetická indukcia v dutine cievky. Minimálnu potenciálnu energiu označme E_{p1}, jej hodnota je $E_{p1} = -m\,B$. Zodpovedá jej poloha, v ktorej sú vektory $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{B}$ rovnobežné a súhlasne orientované, čo znamená, že rovina štvorcovej cievky je kolmá na os solenoidu. Cievku môžeme z takejto rovnovážnej polohy v strede solenoidu vytiahnuť do nekonečnej vzdialenosti od solenoidu rôznym spôsobom, práca vonkajšej sily však bude pri tom závisieť iba od počiatočnej a konečnej polohy cievky. Výhodné je predstaviť si vytiahnutie cievky v troch etapách: 1) Otočenie cievky z rovnovážnej polohy do polohy, v ktorej sú dve strany štvorca cievky rovnobežné s osou solenoidu, 2) vytiahnutie takto otočenej cievky pozdĺž osi solenoidu do nekonečnej vzdialenosti od solenoidu, 3) v nekonečnej vzdialenosti ľubovoľné otáčanie a posúvanie cievky.

Na konci prvej etapy sú vektory $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{B}$ vzájomne kolmé a potenciálna energia cievky je $E_{p2} = 0$. Práca vonkajšej sily pri otočení cievky sa prejaví ako prírastok potenciálnej energie cievky $W = \Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = 0 - (-m\,B) = m\,B$. Magnetický moment cievky je $m = N_2\,I_2\,S$, kde $S = a^2$ je plocha jedného závitu cievky, takže $m = N_2\,I_2\,a^2$. Magnetická indukcia, ktorú vytvára solenoid v strede svojej dutiny, je $B = \mu_0 N_0 I_1$ (pozri príklad 4.8), kde $N_0 = \dfrac{N_1}{\ell}$ je dĺžková hustota závitov solenoidu, takže $B = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell}$. Práca vonkajšej sily pri otočení je preto $W = N_2 I_2 a^2 \dfrac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell}$.

Pre určenie práce vonkajšej sily v druhej etape si predstavme, že pozdĺž osi solenoidu posúvame štvorcovú slučku, ktorá je otočená tak, že dve strany štvorca sú stále rovnobežné s osou solenoidu, čo znamená, že dve ďalšie strany sú na os stále kolmé. Na strany slučky kolmé na os solenoidu pôsobia všade pozdĺž osi solenoidu magnetické sily, ktoré sú kolmé na os solenoidu. Na strany slučky rovnobežné s osou pôsobia magnetické sily v tých častiach solenoidu, kde sa indukčné čiary rozbiehajú, to znamená hlavne v okolí koncov solenoidu. Tieto sily sú tiež kolmé na os solenoidu. Magnetické sily pôsobiace na takto otočenú slučku nemajú žiadnu zložku v smere osi solenoidu, preto na posúvanie slučky pozdĺž osi je potrebná nulová vonkajšia sila, ktorá koná nulovú prácu. Práca vonkajšej sily v druhej etape je teda nulová.

V tretej etape sa cievka otáča a pohybuje mimo magnetického poľa, na čo je potrebná nulová vonkajšia sila a teda aj nulová práca.

Nenulová je iba práca v prvej etape. Výsledná práca, ktorú musí vykonať vonkajšia sila pri vytiahnutí cievky, je preto $W = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 I_2 a^2}{\ell} = 1{,}26 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}$.

4.18 Nájdite výraz pre hustotu energie magnetického poľa v strede dutiny tenkého dlhého solenoidu s dĺžkovou hustotou závitov $N_0 = 1000\ \mathrm{m^{-1}}$, keď solenoidom tečie prúd $I = 1\ \mathrm{A}$.

Riešenie

Hustotu energie magnetického poľa vyjadruje vzťah $w = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{H}$ je intenzita magnetického poľa a $\boldsymbol{B}$ indukcia magnetického poľa v danom bode. Vo vákuu platí $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$, preto $w = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \mu_0 \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{2}\mu_0 H^2$. V príklade 4.8 sme ukázali, že v strede dlhého solenoidu platí $H = N_0 I$, hľadaná hustota energie magnetického poľa v tomto bode je preto $w = \dfrac{1}{2}\mu_0 \left(N_0 I\right)^2 = 0{,}628\ \mathrm{J \cdot m^{-3}}$.

4.19 Solenoidom s dĺžkou $\ell = 50\ \mathrm{cm}$, s polomerom $R = 1\ \mathrm{cm}$ a s počtom závitov $N = 500$ preteká prúd $I = 1\ \mathrm{A}$. Solenoid náhle prepojíme od zdroja na rezistor. Určte množstvo tepla, ktoré sa uvoľní na elektrickom odpore rezistora a vinutia solenoidu. Predpokladajte, že magnetické pole je v celej dutine solenoidu homogénne.

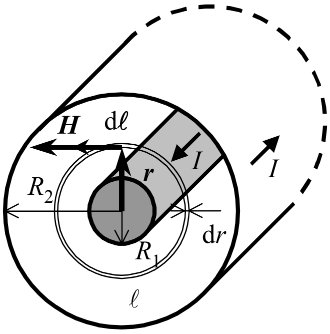
Riešenie

Po odpojení solenoidu od zdroja prúdu zanikajúce magnetické pole solenoidu indukuje na svorkách vinutia napätie, takže keď je na svorky pripojený rezistor, cez vinutie a rezistor tečie prúd. Týmto javom (javom elektromagnetickej indukcie) sa zaoberá kapitola č. 6. Pre nás je teraz dôležité, že prechodom prúdu sa na odpore vinutia a rezistora uvoľní Joulovo teplo, na čo je podľa zákona zachovania energie potrebný zdroj energie. V tomto prípade je zdrojom energie magnetické pole solenoidu (podobne, ako pri vybíjaní kondenzátora elektrické pole kondenzátora). Ak prijmeme zjednodušený predpoklad (ktorý je tým lepší, čím je solenoid dlhší a užší), že celé magnetické pole je sústredené v dutine solenoidu, kde je homogénne, a že mimo dutiny je jeho príspevok k celkovej energii zanedbateľný, môžeme celkovú počiatočnú energiu pred odpojením solenoidu od zdroja vyjadriť vzťahom $E_\mathrm{p} = w\tau$, kde w je počiatočná hustota energie magnetického poľa v dutine a τ je objem dutiny. V príklade 4.18 sme ukázali, že v strede solenoidu (a pri predpoklade homogenity magnetického poľa aj v celej dutine) je $w = \dfrac{1}{2}\mu_0 \left(N_0 I\right)^2$, kde $N_0 = \dfrac{N}{\ell}$ je dĺžková hustota závitov solenoidu, takže $w = \dfrac{\mu_0 N^2 I^2}{2\ell^2}$. Objem valcovej dutiny je $\tau = \pi R^2 \ell$. Hľadaná počiatočná energia magnetického poľa solenoidu, a teda aj množstvo uvoľneného Joulovho tepla, je:

$$Q = E_\mathrm{p} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2\ell^2} \pi R^2 \ell = \frac{\pi \mu_0 \left(R N I\right)^2}{2\ell} = 9{,}87 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}\,.$$

4.20 *Máme koaxiálny kábel s polomerom vnútorného vodiča $R_1 = 0{,}5\ \mathrm{mm}$. Vonkajší dutý vodič má polomer $R_2 = 5\ \mathrm{mm}$, hrúbku jeho steny možno zanedbať. Vo vodičoch kábla tečú nesúhlasne orientované prúdy $I = 100\ \mathrm{mA}$. Určte energiu magnetického poľa v kábli pripadajúcu na úsek kábla s dĺžkou $x = 1\ \mathrm{m}$.

Riešenie



Obr. 4.17

Aby sme mohli určiť energiu magnetického poľa kábla, je potrebné poznať v každom bode jej hustotu, k čomu je zase potrebné poznať v každom bode intenzitu magnetického poľa. Intenzitu magnetického poľa koaxiálneho kábla $\boldsymbol{H}$ možno ľahko určiť pomocou Ampérovho zákona. Kábel má rotačnú symetriu okolo svojej pozdĺžnej osi, preto za integračnú dráhu je vhodné zvoliť kružnicu ℓ (obr. 4.17), ktorá leží v rovine kolmej na os kábla a ktorej stred leží na osi kábla. Na tejto kružnici má $\boldsymbol{H}$ z dôvodu symetrie konštantnú veľkosť. Treba pritom rozlíšiť tri prípady, v závislosti od polomeru r integračnej kružnice ℓ:

a) Pre $r \le R_1$ určujeme $\boldsymbol{H}$ v objeme vnútorného vodiča. Integračná kružnica obopína iba časť I' z celkového prúdu I v tomto vodiči. Podľa Ampérovho zákona platí $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I'$. Ak predpokladáme, že hustota prúdu J v tomto vodiči je homogénna, potom platí $J = \dfrac{I}{\pi R_1^2}$ a $I' = J \pi r^2 = \dfrac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2 = \dfrac{I r^2}{R_1^2}$. Smer a orientácia vektora $\boldsymbol{H}$ vyplýva z Biotovho-Savartovho zákona. Vektory $\boldsymbol{H}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ sú rovnobežné, preto $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi r} H\, \mathrm{d}\ell = H\, 2\pi r$ a Ampérov zákon je $H\, 2\pi r = \dfrac{I r^2}{R_1^2}$, odkiaľ $H = \dfrac{I r}{2\pi R_1^2}$.

b) Pre $R_1 \le r < R_2$ určujeme $\boldsymbol{H}$ v priestore medzi dvoma vodičmi. Integračná kružnica obopína celý prúd I, takže podľa Ampérovho zákona platí $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I$. Smer a orientácia vektora $\boldsymbol{H}$ je rovnaká ako v predchádzajúcom prípade, preto Ampérov zákon možno písať v tvare $H\, 2\pi r = I$, odkiaľ $H = \dfrac{I}{2\pi r}$.

c) Pre $r > R_2$ určujeme $\boldsymbol{H}$ v priestore mimo kábla. Integračná dráha obopína obidva vodiče. Algebrický súčet ich prúdov je $I + \left(-I\right) = 0$, preto podľa Ampérovho zákona $\oint_\ell \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$, odkiaľ $H = 0$. Vidíme, že magnetické pole je celé sústredené do vnútorného objemu kábla.

Hustota energie magnetického poľa je $w = \dfrac{1}{2} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$. Všade v kábli je $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ (predpokladáme, že aj vo vodiči je permeabilita μ_0), preto $w = \dfrac{1}{2} \mu_0 H^2$. Ak za elementárny objem zvolíme objem medzi valcami s polomermi r a $r + \mathrm{d}r$ a s výškou x, t.j. $\mathrm{d}\tau = 2\pi r\, \mathrm{d}r\, x$, potom hľadaná energia magnetického poľa v úseku kábla s dĺžkou x je:

$$E_\mathrm{p} = \int_0^V w\, \mathrm{d}\tau = \int_0^{R_2} \frac{1}{2} \mu_0 H^2 x\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = \int_0^{R_1} \mu_0 \left(\frac{I r}{2\pi R_1^2}\right)^2 x \pi r\, \mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 x \pi r \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 x}{4\pi R_1^2} \int_0^{R_1} r^3 \mathrm{d}r + \frac{\mu_0 I^2 x}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I^2 x}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right) = 2{,}55 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}\,.$$

4.4 Neriešené príklady

4.21 Sú dané dve rovnaké ploché cievky s počtom závitov $N = 50$, stredný polomer cievok je $R = 10\ \mathrm{cm}$. Cievky sú umiestnené tak, že majú spoločnú os, pričom vzdialenosť medzi rovinami cievok je $d = 10\ \mathrm{cm}$. Cievkami tečú rovnako orientované prúdy s veľkosťou $I = 1\ \mathrm{A}$. Určte magnetickú indukciu na osi cievok v strednej vzdialenosti medzi cievkami!

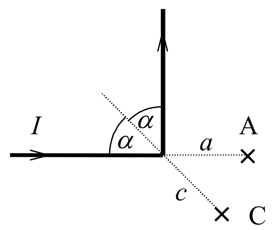
4.22 Plochá cievka s $N = 5$ závitmi a polomerom $R = 10$ cm je umiestnená v magnetickom poli Zeme tak, že roviny jej závitov sú rovnobežné s poludníkovou rovinou magnetického poľa Zeme. V strede cievky je umiestnená buzola. Po zapnutí prúdu v cievke sa magnetka buzoly vychýli zo svojho pôvodného poludníkového smeru o uhol $\varphi = 45°$. Určte, aký prúd tečie závitmi cievky, keď veľkosť vodorovnej zložky magnetickej indukcie Zeme v danom mieste je $B = 2{,}0 \cdot 10^{-5}$ T.

4.23 Dve súosové kruhové rovnobežné prúdové slučky s polomerom $R = 10\ \mathrm{cm}$ sú od seba vzdialené $d = 10\ \mathrm{cm}$. V strede medzi slučkami je umiestnená buzola. Keď v slučkách netečie prúd, natočíme ich spoločnú os tak, aby bola kolmá na smer magnetky, ktorá vtedy sleduje smer vodorovnej zložky magnetickej indukcie magnetického poľa Zeme, čo je približne smer juh - sever, čiže smer osi je približne východ - západ. Určte uhol, o ktorý sa magnetka vychýli od svojho pôvodného smeru, keď v slučkách budú tiecť súhlasne orientované prúdy $I = 2\ \mathrm{A}$. Vodorovná zložka magnetickej indukcie Zeme má veľkosť $B = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$.

4.24 Priamy úsek vodiča má dĺžku $\ell = 20\ \mathrm{cm}$ a tečie ním prúd $I = 1\ \mathrm{A}$. Určte príspevok tohto úseku k celkovej magnetickej indukcii obvodu v kolmej vzdialenosti $a = 10\ \mathrm{cm}$ od stredu úseku.

4.25 Veľmi dlhý priamy vodič je ohnutý do pravého uhla podľa obr. 4.18 a tečie ním prúd $I = 50\ \mathrm{A}$. Určte vektor magnetickej indukcie v bode A, ktorý je od vrcholu uhla vo vzdialenosti $a = 5\ \mathrm{cm}$.

4.26 Veľmi dlhý priamy vodič je ohnutý do pravého uhla podľa obr. 4.18 a tečie ním prúd $I = 50\ \mathrm{A}$. Určte vektor magnetickej indukcie v bode C, ktorý je od vrcholu uhla vo vzdialenosti $c = 5\ \mathrm{cm}$.



Obr. 4.18

4.27 Určte intenzitu magnetického poľa v strede pravidelného šesťuholníka so stranou b = 10 cm, po obvode ktorého tečie prúd I = 10 A.

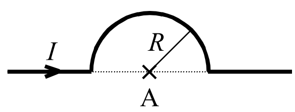
4.28 Vyjadrite intenzitu magnetického poľa v strede obdĺžnika so stranami b a c, po obvode ktorého tečie prúd I.

4.29 Sú dané dva priame nekonečne dlhé rovnobežné vodiče, vzdialené od seba d = 10cm, ktorými tečú rovnako veľké a rovnako orientované prúdy I = 2A. Vypočítajte indukciu magnetického poľa na kolmej spojnici medzi vodičmi a) vo vzdialenosti a = 4 cm od prvého vodiča smerom k druhému vodiču, b) v strede spojnice.

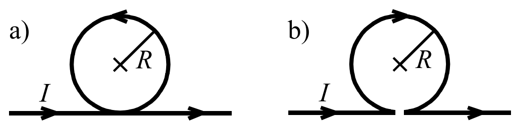
4.30 Dva veľmi dlhé priame vodiče sú navzájom rovnobežné a ich vzdialenosť je $d = 20$ cm. Druhým vodičom tečie dvakrát väčší prúd než prvým vodičom. Určte miesto na kolmej spojnici medzi vodičmi, v ktorom je magnetická indukcia nulová, ak prúdy vo vodičoch sú orientované:
a) súhlasne, b) nesúhlasne.

4.31 Dvoma priamymi veľmi dlhými rovnobežnými vodičmi tečie rovnaký prúd I. Medzi vodičmi je vzdialenosť $2a$. Určte intenzitu magnetického poľa v rovine súmernosti medzi vodičmi, vo vzdialenosti x od roviny vodičov, ak prúdy vo vodičoch sú orientované:
a) súhlasne, b) nesúhlasne. (*Návod: Nakreslite situáciu v rovine kolmej na vodiče.*)

4.32 Nekonečný priamy vodič, ktorým tečie prúd $I = 10\ \mathrm{A}$, vytvára v istom mieste polkružnicu s polomerom $R = 10\ \mathrm{cm}$ podľa obr. 4.19. Určte vektor magnetickej indukcie v strede polkružnice (v bode A)!



Obr. 4.19



Obr. 4.20

4.33 Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým tečie prúd $I = 100\ \mathrm{A}$, vytvára v určitom mieste kruhovú slučku s polomerom $R = 50\ \mathrm{cm}$, ktorej rovina je totožná s rovinou, v ktorej leží priamková časť vodiča (obr.4.20). Určte vektor magnetickej indukcie v strede slučky pre obidve možné orientácie prúdu v slučke!

4.34 Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým tečie prúd $I = 100$ A, vytvára v určitom mieste kruhovú slučku s polomerom $R = 50$ cm, ktorej rovina je kolmá na vodič. Určte magnetickú indukciu v strede slučky!

4.35 Na drevenom prstenci s malým priečnym prierezom je rovnomerne navinutých $N = 2500$ závitov vodiča, ktorým tečie prúd I. Vypočítajte pomer veľkostí magnetickej indukcie v drevenom jadre toroidu a v strede symetrie toroidu! (*Návod: Pozri najprv Otázky a problémy, úlohu č.7*).

4.36 *Priamym homogénnym drôtom s polomerom R tečie jednosmerný prúd s hustotou prúdu $\boldsymbol{J}$. Vyjadrite vektor magnetickej indukcie magnetického poľa tohto prúdu v bode, ktorého poloha vzhľadom na os drôtu je daná polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ kolmým na os drôtu. Výpočet urobte pre body mimo drôtu a pre body v drôte! Permeabilita sa všade rovná permeabilite vákua. Vyjadrite závislosť veľkosti magnetickej indukcie od vzdialenosti r a znázornite ju graficky!

4.37 *Koaxiálny kábel sa skladá z vnútorného plného vodiča s polomerom R_1 a z vonkajšieho dutého vodiča s polomerom R_2 a so zanedbateľnou hrúbkou. Vodičmi kábla tečú nesúhlasne orientované prúdy I. Nájdite závislosť veľkosti magnetickej indukcie od vzdialenosti r od osi koaxiálneho kábla pre $r \in \langle 0, \infty)$. Závislosť znázornite graficky!

4.38 *Homogénne nabitá kruhová doska s polomerom $R = 25$ cm sa otáča okolo svojej osi s frekvenciou $f = 15\ \mathrm{Hz}$, čím vo svojom okolí vytvára magnetické pole. Určte, aký náboj je potrebné umiestniť na doske, aby magnetická indukcia v strede dosky bola $B = 1 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{T}$.

4.39 *Doskový kondenzátor s doskami v tvare kruhov s polomerom b a vzdialenosťou dosiek d je nabitý na rozdiel potenciálov U a v čase $t = 0$ s je prepojený rezistorom s elektrickým odporom R (začne sa vybíjať cez R). a) Nájdite časovú závislosť napätia na kondenzátore! b) Určte časovú závislosť intenzity elektrického poľa medzi doskami! c) Určte časovú závislosť intenzity magnetického poľa medzi doskami vo vzdialenosti r od spojnice stredov dosiek, pričom $r < b$. Systém je vo vákuu a platí $b \ll d$. (*Návod: Magnetické pole medzi doskami súvisí s posuvným prúdom*).

4.40 Akou silou (určte jej smer, orientáciu a veľkosť) pôsobí nekonečné dlhý priamy vodič pretekaný prúdom $I = 1$ A na elektrón, ktorý v danom okamžiku letí rýchlosťou $v = 10^6$ m·s^{-1} rovnobežne s vodičom vo vzdialenosti $d = 1$ cm od vodiča tak, že vektor jeho rýchlosti je orientovaný súhlasne s prúdom vo vodiči?

4.41 Určte vektory magnetických síl, ktorými na seba vo vákuu pôsobia dva rovnobežne (kolmo na ich spojnicu) letiace elektróny. Rýchlosť oboch elektrónov je $v = 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, vzdialenosť medzi elektrónami je $d = 1\ \mu\mathrm{m}$.

4.42 Elektrón, ktorý sa pôvodne pohyboval rovnomerne priamočiaro rýchlosťou $v = 100$ m·s^{-1} vletel do homogénneho magnetického poľa, ktorého vektor magnetickej indukcie bol kolmý na počiatočný smer rýchlosti. Magnetické pole spôsobilo zakrivenie dráhy elektrónu na kružnicu s polomerom $R = 1$ cm. Určte veľkosť magnetickej indukcie poľa!

4.43 Hmotnostný spektrometer slúži na meranie hmotnosti atómov a molekúl. Funguje na princípe vychyľovania pohybujúceho sa ionizovaného atómu alebo molekuly v magnetickom poli: ak vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je kolmý na vektor rýchlosti iónu v, ión sa pohybuje po kruhovej trajektórii, ktorej polomer R závisí okrem B a v od náboja Q a hmotnosti m iónu. Zo zmeranej hodnoty polomeru R možno preto určiť hmotnosť iónu m. Určte závislosť $m = f(B, v, R, Q)$!

4.44 Elektrón, ktorý bol z pokojového stavu urýchlený potenciálovým rozdielom $U = 100$ V vletel do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou $B = 10$ mT, v dôsledku čoho sa začal pohybovať po kruhovej dráhe s polomerom $R = 3{,}37$ mm. Smer pohybu bol na začiatku kolmý na smer magnetickej indukcie. Na základe týchto údajov určte špecifický náboj elektrónu (to znamená pomer náboja a hmotnosti elektrónu)!

4.45 Elektrón s kinetickou energiou $E_\mathrm{k} = 200$ eV vletel do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou $B = 2$ mT v smere kolmom na indukčné čiary. Určte polomer krivosti dráhy elektrónu v magnetickom poli!

4.46 *Elektrón, pohybujúci sa rýchlosťou $v = 5 \cdot 10^6$ m, vletel do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou $B = 1 \cdot 10^{-4}$ T v smere kolmom na indukčné čiary. Určte vzdialenosť, o ktorú sa elektrón vychýlil od priameho smeru, keď preletel dráhu $d = 10$ cm.

4.47 Elektrón vletí do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou $B = 5 \cdot 10^{-4}$ T v smere kolmom na indukčné čiary. Určte cyklotrónovú frekvenciu pohybu elektrónu (frekvenciu jeho pohybu po kružnici)!
***Poznámka**: Všimnite si, že podľa výsledku tohto príkladu cyklotrónová frekvencia nezávisí od rýchlosti elektrónu.*

4.48 *Elektrón s rýchlosťou v vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou $\boldsymbol{B}$, ktorá s vektorom rýchlosti zviera určitý uhol $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Ukážte, že elektrón sa bude pohybovať po skrutkovici. Určte polomer a stúpanie (krok) skrutkovice!

(*Návod: Rozložte vektor rýchlosti do smeru rovnobežného a smeru kolmého vzhľadom na smer **B** a o pohybe elektrónu uvažujte ako o zloženom pohybe s týmito počiatočnými rýchlosťami. Využite pritom výsledok predchádzajúceho príkladu.*)

4.49 *Elektrón vletí do homogénneho magnetického poľa v smere, ktorý nie je kolmý na indukčné čiary, v dôsledku čoho sa bude pohybovať po skrutkovici s polomerom $R = 5\ \text{cm}$ a stúpaním (krokom) $\ell = 10\ \text{cm}$. Magnetická indukcia poľa je $B = 1\cdot 10^{-4}\ \text{mT}$. Určte absolútnu hodnotu a smer (uhol α vzhľadom na smer vektora $\boldsymbol{B}$) vektora rýchlosti elektrónu!
(*Návod: Vyriešte najprv predchádzajúce dva príklady a využite ich výsledky.*)

4.50 *V homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 10\ \text{mT}$ vychádza z určitého bodu O v smere osi x mierne sa rozchádzajúci elektrónový lúč elektrónov s rovnakou absolútnou hodnotou rýchlosti $v = 6\cdot 10^{6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určte vzdialenosť ℓ od bodu O k najbližšiemu bodu F, v ktorom sa pretínajú trajektórie všetkých elektrónov (k bodu, v ktorom sa elektrónový lúč fokusuje).
(*Návod: Vyriešte najprv príklady 4.47 a 4.48 a využite ich výsledky.*)

4.51 Je dané homogénne elektrické a magnetické pole, v ktorom je vektor intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ kolmý na vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$, pričom $E = 3{,}4\cdot 10^{3}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$, $B = 2\cdot 10^{-3}\ \text{T}$. Akou rýchlosťou musí do tohto poľa vletieť kolmo na smer vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ elektrón, ak chceme, aby sa pohyboval po priamke?

4.52 Akou silou je vytláčaný vodič s účinnou dĺžkou $\ell = 30$ cm z homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 0{,}8$ T, keď ním preteká prúd $I = 15$ A a keď je uložený kolmo na smer vektora magnetickej indukcie?

4.53 V homogénnom magnetickom poli s vodorovnou magnetickou indukciou je kolmo na indukčné čiary vo vodorovnom smere uložený priamy vodič s dĺžkou $\ell = 10$ cm a s hmotnosťou $m = 10$ g. Vodičom tečie prúd $I = 2$ A. Akú hodnotu má mať indukcia magnetického poľa, aby uvažovaný vodič nespadol, ale sa vznášal?

4.54 Vodorovné koľajničky so vzájomnou vzdialenosťou $\ell = 30$ cm sa nachádzajú v magnetickom poli s vektorom magnetickej indukcie kolmým na rovinu koľajničiek. Priečne kolmo leží na koľajničkách vodivá tyč s hmotnosťou $m = 0{,}5$ kg, ktorou tečie prúd $I = 50$ A. Určte, aká musí byť magnetická indukcia, aby sa tyč dala do pohybu. Faktor trenia tyče o koľajničky je $\mu = 0{,}2$.

4.55 Dvoma priamymi veľmi dlhými rovnobežnými vodičmi tečú rovnako orientované prúdy $I = 10\ \text{A}$. Medzi vodičmi je vzdialenosť $2a = 20$ cm. Určte silu, ktorá pôsobí na $\ell = 1$ m priameho vodiča, ktorý je rovnobežný s týmito vodičmi, nachádza sa v rovine súmernosti medzi vodičmi vo vzdialenosti $x = 10$ cm od roviny vodičov a tečie ním rovnako orientovaný prúd $I_1 = 1$ A.

4.56 Štyri rovnobežné veľmi dlhé vodiče sú umiestnené tak, že ich priesečníky s rovinou, ktorá je na ne kolmá, sa nachádzajú vo vrcholoch štvorca s dĺžkou strany $a = 20$ cm. Vodičmi tečú súhlasne orientované prúdy $I = 10$ A. Určte silu pôsobiacu na úsek s dĺžkou $\ell = 1$ m na každom vodiči!

4.57 Tri rovnobežné veľmi dlhé vodiče sú umiestnené tak, že ich priesečníky s rovinou, ktorá je na ne kolmá, sa nachádzajú vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany $a = 10$ cm. Vodičmi tečú prúdy $I = 1$ A, z nich jeden je opačne orientovaný než ostatné dva. Určte silu pôsobiacu na úsek s dĺžkou $\ell = 1$ m na každom vodiči!

4.58 *Pevnou drôtenou kruhovou slučkou s polomerom $R = 5\ \text{cm}$ a prierezom $S = 5\ \text{mm}^2$ tečie prúd $I = 5\ \text{A}$. Rovina slučky je kolmá na vektor indukcie magnetického poľa, ktorého veľkosť je

$B = 1\,\mathrm{T}$. Pôsobením magnetických síl je drôt v slučke v závislosti od orientácie prúdu napínaný alebo stláčaný. Určte mechanické napätie (silu pôsobiacu na jednotku plochy) v priereze drôtu! (*Návod: Pozri najprv príklad 4.15.*)

4.59 Vo vzdialenosti d od nekonečne dlhého priameho vodiča, ktorým tečie prúd I_1, sa nachádza štvorcová slučka s dĺžkou strán a, ktorou tečie prúd I_2. Priamy vodič a slučka ležia v jednej rovine. Určte: a) výslednú silu pôsobiacu na slučku, b) výsledný moment síl pôsobiacich na slučku.

4.60 Cievkou s polomerom R = 2 cm a počtom závitov N = 500 tečie prúd I = 200 mA. Určte magnetický moment cievky!

4.61 Určte magnetický moment kruhovej prúdovej slučky s polomerom R = 10 cm, keď viete, že táto slučka vytvára vo svojom strede magnetické pole s magnetickou indukciou B = 6 μT.

4.62 *Elektrický náboj Q = 1 nC je homogénne rozložený na kruhovej doske s polomerom R = 20 cm. Určte veľkosť magnetického momentu, ktorý má doska v dôsledku otáčania okolo svojej osi s frekvenciou f = 20 Hz.

4.63 Malá prúdová slučka sa nachádza vo vzdialenosti r od dlhého priameho vodiča, ktorým tečie prúd I. Magnetický moment slučky je $\boldsymbol{m}$, rozmery slučky sú zanedbateľné vzhľadom na vzdialenosť r. Určte smer, orientáciu a veľkosť momentu sily, ktorá pôsobí na slučku, ak vektor $\boldsymbol{m}$: a) je rovnobežný s priamym vodičom, b) má smer polohového vektora slučky $\boldsymbol{r}$, c) má smer vektora intenzity magnetického poľa v bode, kde sa nachádza slučka.

4.64 Vodič, ktorým tečie prúd I = 1 A, má tvar štvorca so stranou a = 10 cm a nachádza sa v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou B = 200 mT. Rovina vodiča je kolmá na smer vektora magnetickej indukcie. Určte prácu, ktorú treba vykonať na natočenie vodiča o uhol $\alpha = 90°$ okolo osi prechádzajúcej stredmi protiľahlých strán štvorca.

4.65 Plochá kruhová cievka s N = 10 závitmi s polomerom R = 2 cm sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou B = 1 mT. Závitmi cievky tečie prúd I = 200 mA. Cievka sa môže otáčať okolo osi, ktorá leží v rovine závitov a ktorá je kolmá na magnetické indukčné čiary poľa. Určte prácu, ktorú vykoná vonkajší moment sily pri otočení cievky z jej rovnovážnej polohy o 180º.

4.66 Dva priame veľmi dlhé rovnobežné vodiče sa nachádzajú v určitej vzdialenosti od seba. Vodičmi tečú rovnako orientované prúdy I_1 = 4 A, I_2 = 3 A. Na zväčšenie vzájomnej vzdialenosti na trojnásobok musí vonkajšia sila vykonať prácu. Určte časť tejto práce, ktorá pripadá na úsek vodičov s dĺžkou $\ell = 1\,\mathrm{m}$.

4.67 Solenoidom s dĺžkou $\ell = 30\,\mathrm{cm}$, s polomerom $R = 1\,\mathrm{cm}$ a s dĺžkovou hustotou závitov $N_0 = 1000\,\mathrm{m}^{-1}$ preteká prúd $I = 1\,\mathrm{A}$. Solenoid náhle skratujeme a odpojíme od zdroja. Určte množstvo Joulovho tepla, ktoré sa uvoľní vo vinutí solenoidu.