ČÍSELNÉ RADY

Budeme sa zaoberať výrazmi, ktoré obsahujú nekonečne veľa sčítancov. Takéto výrazy budeme nazývať nekonečné rady. V nasledujúcom príklade je ilustrované, ako môže takýto výraz vzniknúť.

Príklad 1. Vyjadrime racionálne číslo 3/7 dekadickým zápisom

$$13/7 = 1,857142857\ldots = 1 + 8/10 + 5/10^2 + 7/10^3 + +1/10^4 + \ldots$$

Nech je daná číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Formálne vytvorený výraz

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nazývame nekonečný číselný rad, stručne rad, vytvorený z členov danej postupnosti. Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nazývame členmi radu. Rad označujeme tiež symbolom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

(číta sa: suma a_n, n ide od 1 do ∞).
Z elementárnej aritmetiky poznáme presný význam súčtu konečného počtu sčítancov. Našim cieľom je rozšíriť pojem súčtu pre nekonečný počet sčítancov.

Nech je daný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Utvorme súčet jeho prvých dvoch, troch, atď. členov. Označme

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Číslo s_n nazývame n**-tým čiastočným súčtom** daného radu.
Postupnosť $\{s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots\}$ nazývame **postupnosťou čiastočných súčtov** daného radu.
Ak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, t.j. ak existuje vlastná limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentný** a **má súčet** s. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Ak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentná, hovoríme,že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentný** a **nemá súčet**.

Dôležitým príkladom radu je geometrický rad.

Geometrická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **geometrická**, ak existuje také číslo q, že pre každé prirodzené číslo n platí :

$$a_{n+1} = a_n q$$

Číslo q sa nazýva **kvocient**.
Pre geometrickú postupnosť platia tieto tvrdenia:
(1) n-tý člen geometrickej postupnosti je daný vzťahom

$$a_n = a_1 q^{(n-1)}$$

(2) Pre ľubovoľné dva členy a_r , a_s geometrickej postupnosti platí

$$a_r = a_s . q^{(r-s)}$$

(3) Pre súčet s_n prvých n členov geometrickej postupnosti platí

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ , ak } \; q \neq 1 \text{ ,}$$
$$s_n = n a_1 \text{ , ak } \; q = 1$$

Geometrický rad

Ak je daná geometrická postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $a_1 \neq 0$ a kvocientom q, tak príslušný rad

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

sa nazýva **geometrický rad**. Pre n-tý čiastočný súčet s_n platí:

$$s_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ , } \quad \text{ak } \; q \neq 1 \text{ ,}$$
$$s_n = n a_1 \text{ , } \quad \text{ak } \; q = 1.$$

Dá sa dokázať, že
pre $|q| \geq 1$ postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje.
pre $|q| < 1$ postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a platí

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q - 1} \lim_{n \to \infty} (q^n - 1) = \frac{a_1}{q - 1}(0 - 1) = \frac{a_1}{1 - q}$$

Preto

$$\boxed{\text{geometrický rad } \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \text{ je pre } |q| < 1 \text{ konvergentný a jeho súčet je } s = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Príklad 2. Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

je geometrický rad, lebo

$$\frac{1}{2^n} : \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} = q$$

je konštanta (nezávisí od n). Jeho kvocient $q = 1/2 < 1$, preto je daný rad konvergentný a pre jeho súčet s platí :

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Divergentné rady sú len formálne výrazy, takže ich ďalšie vyšetrovanie nemá význam. Teraz si uvedieme vetu, ktorá umožňuje vylúčiť z našich úvah istú podmnožinu divergentných radov.

Nutná podmienka konvergencie radu.

Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Príklad 3. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n$ je divergentný, lebo $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty \neq 0$.
Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n+1}$ je divergentný, lebo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{n+1} = 5 \neq 0$.

Podmienka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ je len nutná, ale nie postačujúca pre konvergenciu radu. Ukážeme si to na príklade.

Príklad 4. Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

sa nazýva **harmonický rad**. Jeho n-tý člen je $a_n = \frac{1}{n}$. Platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Napriek tomu sa dá dokázať, že tento rad diverguje.
Pre rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$$

a dá sa dokázať, že tento rad konverguje.

Vidíme teda, že ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ môže ale aj nemusí byť konvergentný.

Na vyšetrovanie konvergencie číselných radov používame vety, ktoré sa nazývajú kritériá konvergencie.

Rady s nezápornými členmi

Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \qquad a_n \geq 0 \tag{2}$$

sa nazýva rad s nezápornými členmi.

Porovnávacie kritérium.

Nech $\exists\, n_0 \in N$ také, že $\forall\, n \geq n_0$ je $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí
1. Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Ak diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Hovoríme, že
rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je **majorantný rad k radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,
rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **minorantný rad k radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

d'Alembertovo kritérium. Nech pre členy radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kde $a_n \geq 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (l \text{ môže byť aj } \infty).$$

Potom
1. Ak $l > 1$, rad diverguje.
2. Ak $l < 1$, rad konverguje.
3. Ak $l = 1$, podľa tohoto kritéria nemožno o konvegencii radu rozhodnúť.

Cauchyho kritérium. Nech pre členy radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kde $a_n \geq 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad (l \text{ môže byť aj } \infty).$$

Potom
1. Ak $l > 1$, rad diverguje.
2. Ak $l < 1$, rad konverguje.
3. Ak $l = 1$, podľa tohoto kritéria nemožno o konvegencii radu rozhodnúť.

Príklad 5. Pomocou d'Alembertovho kritéria vyšetrime konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Daný rad je konvergentný.

Cauchyho integrálne kritérium

Nech k radu (2) existuje funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nezáporná a nerastúca na nejakom intervale $\langle a, \infty)$ a $\forall n \in N,\ n \geq n_0$ platí $a_n = f(n)$.

Potom ak $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ konverguje, aj rad (2) konverguje. Ak $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ diverguje, aj rad (2) diverguje.

Rady so striedavými znamienkami

Radom so striedavými znamienkami nazývame rad

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \tag{3}$$

kde $a_n > 0$ pre $n = 1, 2, \ldots, n$.

Leibnizovo kritérium

Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvorená z členov radu (3) je nerastúca. Potom rad (3) konverguje vtedy a len vtedy ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Rady s ľubovoľnými členmi

Označme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \qquad a_n \in R \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,. \tag{5}$$

Veta. Ak rad (5) konverguje, potom konverguje aj rad (4).

Definícia. Hovoríme, že rad (4) **absolútne konverguje**, ak konverguje aj rad (5).
Rad, ktorý konverguje, ale nekonverguje absolútne nazývame **relatívne konvergentným**.

Ak daný rad je rad s nezápornými členmi, potom absolútna konvergencia je to isté ako konvergencia. Teda rad s nezápornými členmi ak konverguje, tak konverguje absolútne.
Kritériá konvergencie , ktoré sme uviedli pre rady s nezápornými členmi môžme použiť na vyšetrenie absolútnej konvergencie ľubovoľnych radov. Tieto kritéria však nedávajú odpoveď na to, či daný rad je relatívne konvergentný. Jedine Leibnizovo kritérium môžeme použiť na vyšetrenie relatívnej konvergencie radov so striedavými znamienkami.
Preto v prípade, že rad nekonverguje absolútne, je užitočné vedieť, či konverguje relatívne. Na to máme niekoľko kritérií. Uvedieme jedno z nich.

Abelovo kritérium

Uvažujme rad
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n.$$

Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a ak postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna a ohraničená,

potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ konverguje.

Súčet radov

Nech sú dané rady
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{7}$$

Súčtom radov (6) a (7) nazývame rad
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \tag{8}$$

Vzhľadom na definíciu súčtu radov môžeme formálne písať
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Ak oba rady (6), (7) konvergujú, potom aj rad (8) konverguje.
Ak jeden z radov (6), (7) konverguje a druhý diverguje, potom rad (8) diverguje.
Ak oba rady (6), (7) divergujú, potom rad (8) môže byť konvergentný aj divergentný.