FUNKCIONÁLNE POSTUPNOSTI

Funkcionálnou postupnosťou nazývame postupnosť, ktorej členy sú funkcie

$$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\} = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

Definícia 1. Nech členy funkcionálnej postupnosti (1) sú definované na množine D. Hovoríme, že funkcionálna postupnosť (1) konverguje v čísle $x_0 \in D$, ak číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Ak postupnosť (1) konverguje v každom čísle $x \in I \subseteq D$, potom hovoríme, že postupnosť (1) **bodove konverguje na** I.
Limitnou funkciou, alebo limitou konvergentnej postupnosti (1) nazývame funkciu $f(x)$ definovanú na I vzťahom

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Množinu I všetkých x, v ktorých postupnosť (1) konverguje nazývame **obor konvergencie** postupnosti (1).
Hovoríme, že postupnosť (1) **diverguje** v čísle $x_0 \in D$, ak číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje.
Definíciu bodovej konvergencie postupnosti môžeme zapísať aj takto:

Definícia 2. Hovoríme, že postupnosť (1) **bodove konverguje** na množine I k funkcii $f(x)$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ a ku každému $x_0 \in I$ existuje prirodzené číslo n_0 (závisí od ε aj x_0) také, že pre každé $n > n_0$ platí

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Často je dôležité vedieť, ktoré vlastnosti členov postupnosti (1) sa prenášajú na limitnú funkciu $f(x)$. Ukazuje sa, že bodová konvergencia týchto vlastností zachováva veľmi málo. Preto sa zavádza ďalší typ konvergencie tzv. rovnomerná konvergencia.

Definícia 3. Hovoríme, že postupnosť (1) **rovnomerne konverguje** na množine I k funkcii $f(x)$, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 (závisí len od ε) také, že pre každé $n > n_0$ a každé $x \in I$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

FUNKCIONÁLNE RADY

Nech $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je funkcionálna postupnosť definovaná na množine $D \subseteq (-\infty, \infty)$. Potom výraz

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \qquad x \in D \subseteq (-\infty, \infty). \tag{2}$$

nazývame **nekonečným funkcionálnym radom**. Funkcie $f_n(x)$ nazývame členmi radu. Funkcia

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \qquad x \in D,$$

ktorá je súčtom prvých n - členov radu (2) sa nazýva **n-tý čiastočný súčet radu.**
Postupnosť $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **postupnosťou čiastočných súčtov** radu.

Definícia 3. Hovoríme, že funkcionálny rad (2) bodove konverguje na množine $I \subseteq D$, ak na I bodove konverguje postupnosť $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov. Funkciu

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \qquad x \in I$$

nazývame **súčtom radu**, čo zapisujeme

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in I.$$

Množinu I nazývame **obor konvergencie radu** (2).

Obor konvergencie môžme určiť pomocou nasledujúceho kritéria.

Veta. Nech pre rad (2) a každé $x \in D$ existuje limita (vlastná alebo nevlastná)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = L(x)$$

alebo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = L(x)\,.$$

Potom
1. Vo všetkých číslach $x \in D$, pre ktoré $L(x) < 1$, rad (2) absolútne konverguje.
2. Vo všetkých číslach $x \in D$, pre ktoré $L(x) > 1$, rad (2) diverguje.

(Ak $L(x_0) = 1$, číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ musíme vyšetriť osobitne.)

Rovnomerná konvergencia funkcionálnych radov

Definícia. Hovoríme, že funkcionálny rad (2) **rovnomerne konverguje** na množine I, ak na množine I rovnomerne konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Weierstrassova veta. Nech existuje taký číselný, nezáporný, konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\forall\ x \in I$ platí $|f_n(x)| \le a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom rad (2) rovnomerne aj absolútne konverguje na množine I.

Základné vlastnosti rovnomerne konvergentných radov

Veta 1. Nech rad (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rovnomerne konverguje na intervale I k súčtu $s(x)$. Ak každý člen $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ radu (2) je spojitá funkcia na I, potom aj súčet $s(x)$ je spojitá funkcia na I.

Veta 2. Nech rad (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rovnomerne konverguje na intervale I k súčtu $s(x)$. Ak každý člen $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ radu (2) je integrovateľná funkcia na I, potom aj $s(x)$ je integrovateľná funkcia na I a $\forall\ a, b \in I$ platí

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Veta 3. Nech rad (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje aspoň v jednom čísle z intervalu $I = (a, b)$. Nech $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ majú spojitú deriváciu $f_n'(x)$ na intervale I. Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ rovnomerne konverguje na intervale I k súčtu $g(x)$. Potom aj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ rovnomerne konverguje na intervale I k funkcii $s(x)$, ktorá má na I deriváciu $s'(x)$ a platí

$$s'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \qquad x \in I.$$

Mocninové rady

Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots \tag{3}$$

nazývame **mocninový** (potenčný) rad so stredom a.
$a_n(x-a)^n$ je n-tý člen radu.
$a_n \in R$ je koeficient radu.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

nazývame **mocninový** (potenčný) rad so stredom 0.

Abelova veta. Ak mocninový rad (3) konverguje v nejakom čísle $x_0 \neq a$, potom tento rad absolútne konverguje v každom čísle $x \in (-\infty, \infty)$, pre ktoré platí $|x-a| < |x_0 - a|$.

Dôsledok Abelovej vety. Ak mocninový rad (3) diverguje v nejakom čísle $x_0 \neq a$, potom tento rad diverguje v každom čísle $x \in (-\infty, \infty)$, pre ktoré platí $|x-a| > |x_0 - a|$.

Veta. Pre každý mocninový rad (3) existuje taký otvorený interval $(a-R, a+R)$, $0 \le R \le \infty$, že na tomto intervale rad (3) absolútne konverguje.
$(a-R, a+R)$ je **interval konvergencie radu** (3).
R je **polomer konvergencie** radu (3).
Obor konvergencie radu (3) je niektorý z intervalov: $(a-R, a+R)$, $< a-R, a+R)$, $< a-R, a+R >$, $(a-R, a+R >$.

Na určenie polomeru konvergencie mocninového radu môžme použiť kritéria:

Veta. Nech pre rad (3) existuje limita (vlastná alebo nevlastná)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

alebo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L\,.$$

Potom pre polomer konvergencie R platí:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{L}\,, && \text{ak } 0 < L < \infty \\ R &= 0, && \text{ak } L = \infty \\ R &= \infty, && \text{ak } L = 0. \end{aligned}$$

Rovnomerná konvergencia mocninových radov

Veta Mocninový rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, ktorého polomer konvergencie je R rovnomerne konverguje na každom intervale

$$< b, c > \subset \ (a-R, a+R)$$

Taylorov polynóm

Definícia: Nech $f(x)$ je definovaná v $O(a)$ a nech existujú $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$. Polynóm, ktorého hodnota v čísle a sa zhoduje s $f(a)$, jeho prvá derivácia v čísle a sa zhoduje s $f'(a), \ldots$ až $n-$tá derivácia v čísle a sa zhoduje s $f^{(n)}(a)$, sa nazýva $n-$tý Taylorov polynóm funkcie f v čísle a.

$$T_n(f,a,x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ .$$

Taylorova veta. Nech $f(x)$ má v $O(a)$ derivácie až do rádu $(n+1)$ vrátane. Potom $\forall \ x \in O(a)$ existuje číslo ϑ, $0 < \vartheta < 1$, také, že platí Taylorov vzorec

$$f(x) = T_n(f,a,x) + R_{n+1}(x), \qquad \text{kde}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \ , \qquad \xi = a + \vartheta(x-a).$$

R_{n+1} je Lagrangeov tvar zvyšku.

Taylorov rad

Funkcionálny rad

$$T(f,a,x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie $f(x)$ v čísle a.

Taylorov rad funkcie $f(x)$ v čísle $a = 0$ nazývame Mac Laurinov rad:

$$T(f,0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Veta. Funkcia $f(x)$ je súčtom svojho Taylorovho radu v nejakom okolí $O(a)$ čísla a vtedy a len vtedy ak $\forall \ x \in O(a) : \ \lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$

Veta. Funkcia $f(x)$ je súčtom svojho Taylorovho radu v nejakom okolí $O(a)$ čísla a ak existuje konštanta $K > 0$ taká, že $\forall \ n \in N, \ \forall \ x \in O(a) : \ |f^{(n)}(x)| \leq K.$