SYSTÉMY DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

1. Normálny systém diferenciálnych rovníc rádu n

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ &. \quad . \quad . \\ &. \quad . \quad . \\ &. \quad . \quad . \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

$x_i(t),\quad i = 1, 2, ..., n$ sú neznáme funkcie, $x_i'(t)$ sú derivácie podľa t.

(1) nazývame normálny systém diferenciálnych rovníc rádu n.

Riešením systému (1) na intervale J je každá n-tica funkcií $(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$, ktoré sú definované na intervale J, majú tam derivácie a sú také, že dosadením týchto funkcií a ich derivácií do systému (1) dostaneme z každej rovnice tohoto systému rovnosť pre každé $t \in J$.

Ak označíme:

$$\xi = (x_1, x_2, ..., x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix},$$

dostaneme vektorový tvar systému (1)

$$\xi' = \mathbf{F}(t, \xi) \tag{2}$$

Poznámka. Diferenciálnu rovnicu n-tého rádu tvaru

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}), \qquad x = x(t) \tag{3}$$

po použití substitúcie: $x = x_1,\ \ x' = x_2,\ \ x'' = x_3,\ \dots\ , x^{(n-1)} = x_n$,
môžeme zapísať ako systém (1) nasledovne:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &. \quad . \quad . \\ &. \quad . \quad . \\ &. \quad . \quad . \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

Cauchyho začiatočná úloha pre systém (1), resp. (2) sa nazýva úloha nájsť také riešenie systému, pre ktoré v nejakom bode $t_0 \in J$ platí:

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \quad x_2(t_0) = x_{2,0}, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{n,0}, \tag{4}$$

kde $x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0}$ sú dané reálne čísla. Podmienky (4) sa volajú začiatočné podmienky.

Ďalej pod **oblasťou** $\mathcal{O}$ budeme rozumieť množinu všetkých bodov $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ pre ktoré $t \in J = (t_0 - a, t_0 + a)$, $x_i \in (x_{i,0} - b, x_{i,0} + b)$ $i = 1, 2, \dots, n,\ a > 0,\ b > 0$.

Veta. (O existencii a jednoznačnosti riešenia Cauchyho úlohy)
Nech na oblasti $\mathcal{O}$ sú funkcie $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ spojité, ohraničené a parciálne derivácie $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ ohraničené. Potom Cauchyho úloha pre systém (1) a začiatočné podmienky (4) má jediné riešenie na intervale $J_1 \subset J$ $(t_0 \in J_1)$.

2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ &\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ &\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Urobme označenie:

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & . & . & . & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & . & . & . & a_{2n}(t) \\ . & & . & . & & \\ . & & . & . & & \\ . & & . & . & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & . & . & . & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ξ je matica (vektor) neznámych, $\mathbf{A}$ je matica systému (5).
Systém (5) prepíšeme do maticového tvaru:

$$\xi(t)' = \mathbf{A}(t).\,\xi(t) + \beta(t), \quad t \in J. \tag{6}$$

Hovoríme, že systém (6) je **homogénny**, ak $\beta(t) = (0, 0, ..., 0)^T$ $\forall\ t \in J$.
Ak $\beta(t) \neq (0, 0, ..., 0)^T$ pre nejaké $t \in J$, systém (6) je **nehomogénny**.

Veta. Nech matice $\mathbf{A}(t)$, $\beta(t)$ sú spojité na otvorenom intervale J. Potom Cauchyho úloha pre systém (6) (resp. (5)) a začiatočné podmienky (4) má práve jedno riešenie definované na celom intervale J.

Eliminačná metóda riešenia systémov lineárnych diferenciálnych rovníc

Spočíva v tom, že istými úpravami získame taký systém (alebo len jednu rovnicu), že každá rovnica systému obsahuje len jednu neznámu funkciu a jej derivácie. K tomu používame okrem ekvivalentných úprav aj derivovanie, čo nie je ekvivalentná úprava. Preto musíme urobiť skúšku. (Môžeme dostať viac riešení ako má náš systém.)

3. Homogénne systémy lineárnych diferenciálnych rovníc

$$\xi(t)' = \mathbf{A}(t).\,\xi(t), \qquad t \in J. \tag{S}$$

Veta 1. Množina všetkých riešení systému (S) tvorí vektorový priestor dimenzie n.

To znamená, že
1. Ak ξ_1, ξ_2 sú riešenia systému (S) a $c_1, c_2 \in R$, potom aj $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ je riešenie systému (S).
2. Ak $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sú nezávislé riešenia systému (S), potom tvoria bázu vektorového priestoru všetkých riešení systému (S).

Každú n-ticu $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ lineárne nezávislých riešení systému (S) voláme **fundamentálny systém riešení** systému (S).
Všeobecné riešenie systému (S) je

$$\xi(t) = c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t) + ... + c_n\xi_n(t), \quad c_i \in R, \quad t \in J.$$

Veta 2.

Nech
$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1})^T \\ \xi_2 &= (x_{12}, x_{22}, ..., x_{n2})^T \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_n &= (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{nn})^T \end{aligned}$$

sú riešenia systému (S). Potom sú lineárne nezávislé na intervale J vtedy a len vtedy, ak determinant

$$D(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & . & . & . & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & . & . & . & x_{2n}(t) \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & . & . & . & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{aspoň v jednom čísle} \quad t \in J.$$

(Potom je rôzny od nuly pre každé $t \in R$.)

Maticu

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & . & . & . & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & . & . & . & x_{2n}(t) \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & . & . & . & x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

ktorej stĺpce sú lineárne nezávislé riešenia $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ systému (S), nazývame **fundamentálnou maticou** systému (S).

Veta 3. Nech $\mathbf{\Phi}(t)$ je fundamentálna matica systému (S)

$$\xi(t)' = \mathbf{A}(t). \xi(t), \qquad t \in J. \tag{S}$$

Potom platí:
1. $\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}(t). \mathbf{\Phi}(t), \qquad t \in J.$
2. $\det \mathbf{\Phi}(t) \neq 0, \qquad t \in J.$
3. Ak $\mathbf{K}$ je regulárna konštantná matica typu (n, n), potom matica $\mathbf{\Phi}(t)\ \mathbf{K}$ je tiež fundamentálna matica systému (S).

Všeobecné riešenie systému (S) môžeme zapísať aj v tvare

$$\xi(t) = \mathbf{\Phi}(t)\ \mathbf{C}, \qquad \mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in R.$$

4. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami

$$\xi(t)' = \mathbf{A}. \xi(t), \tag{$S1$}$$

prvky matice $\mathbf{A}$ sú čísla.

Riešenie systému (S1) hľadáme v tvare

$$\xi = \kappa e^{\lambda t},$$

kde λ je vlastné číslo matice $\mathbf{A}$ (koreň charakteristickej rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$) a κ odpovedajúci vlastný vektor.

Veta 3. Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú navzájom rôzne vlastné čísla matice $\mathbf{A}$ a nech $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ sú odpovedajúce vlastné vektory matice $\mathbf{A}$. Potom funkcie

$$\xi_i = \kappa_i e^{\lambda_i t}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

tvoria fundamentálny systém riešení systému $\xi(t)' = \mathbf{A}.\, \xi(t)$.

Reálne riešenia v prípade komplexných vlastných čísel matice A

Ak matica $\mathbf{A}$ systému $\xi(t)' = \mathbf{A}.\, \xi(t)$ má jednoduché komplexne združené vlastné čísla $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, potom **2 lineárne nezávislé reálne riešenia** nájdeme takto:
Vyberieme jeden z týchto koreňov, napríklad

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta.$$

Nájdeme odpovedajúci **komplexný** vlastný vektor $\widetilde{\kappa_1}$ a komplexné riešenie

$$\widetilde{\xi} = \widetilde{\kappa_1} e^{\lambda_1 t}$$

Z vlastností riešení homogenného lineárneho diferenciálneho systému vyplýva, že reálne riešenia sú

$$\xi_1 = \operatorname{Re} \widetilde{\xi}, \qquad \xi_2 = \operatorname{Im} \widetilde{\xi}.$$

Tieto riešenia sú lineárne nezávislé.

5. Metóda variácie konštát pre riešenie nehomogénneho lineárneho diferenciálneho systému

$$\xi(t)' = \mathbf{A}(t).\, \xi(t) + \beta(t), \qquad \text{(nehomogénny systém)} \qquad (SP)$$

$$\xi(t)' = \mathbf{A}(t).\, \xi(t). \qquad \text{(príslušný homogénny systém)} \qquad (S)$$

Nech $\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t)$ je fundamentálny systém riešení systému (S)
a $\mathbf{\Phi}(t)$ príslušná fundamentálna matica. Označme:

$$\overline{\xi} = \sum_{i=1}^{n} c_i.\, \xi_i, \qquad c_i \in R \text{ - všeobecné riešenie systému}(S),$$

ξ - všeobecné riešenie systému(SP),

ξ^* - partikulárne riešenie systému(SP).

Potom platí $\xi = \overline{\xi} + \xi^*$.

ξ^* hľadáme metódou variácie konštánt:

$$\xi^* = \sum_{i=1}^{n} c_i(t).\, \xi_i\,, \qquad \text{pričom}$$

$$c_i(t) = \int \frac{D_i(t)}{D(t)}\, dt\,, \quad i = 1, 2, ..., n;$$

$D(t) = \det \mathbf{\Phi}(t)$ a $D_i(t)$ dostaneme z $D(t)$ keď zameníme $i-$ty stĺpec stĺpcom $\beta(t)$.