Obyčajné diferenciálne rovnice

Rovnica

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

je obyčajná diferenciálna rovnica n-tého rádu v implicitnom tvare. F je funkcia (n+2) premenných, y je funkcia x a $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sú jej derivácie.
Ak sa z tejto rovnice dá vyjadriť $y^{(n)}$, môžeme ju napísať v explicitnom tvare

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Riešením diferenciálnej rovnice $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ na neprázdnej množine M je každá funkcia $y = f(x)$, ktorá má na množine M n derivácií a pre ktorú platí

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{pre všetky } x \in M.$$

Hľadané riešenie diferenciálnej rovnice získame obvykle integrovaním.
Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ je riešenie, ktoré môžeme zapísať v tvare

$$y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú ľubovoľné konštanty. Ak konštanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konkrétne zvolíme, dostaneme **partikulárne riešenie**.
Cauchyho začiatočná úloha - nájsť riešenie $y = f(x)$ rovnice
$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky:

$$f(x_0) = b_0, \quad f'(x_0) = b_1, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}, \quad x_0 \in D_f.$$

1. Diferenciálne rovnice prvého rádu

Všeobecný tvar diferenciálnej rovnice 1. rádu je

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Ak sa dá z tejto rovnice vyjadriť y', nazývame ju explicitnou rovnicou:

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Cauchyho začiatočná úloha pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu:
(3) $y' = f(x, y)$
(4) $y(x_0) = y_0$

Veta. (O existencii a jednoznačnosti riešenia diferenciálnej rovnice (3), (4).)
Nech pre funkciu $f(x, y)$ na oblasti $O = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$ platí :
1. $f(x, y)$ je spojitá,
2. $f(x, y)$ je ohraničená,
3. $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ je ohraničená.

Potom má dif. rov. (3), (4) jediné riešenie definované na nejakom okolí bodu x_0.

Úprava diferenciálnej rovnice

Pri hľadaní riešenia rovnice často postupujeme tak, že rovnicu upravujeme. Ak pôvodná a upravená rovnica sú vo vzťahu, že každé riešenie jednej rovnice je aj riešením druhej na tej istej množine a naopak, hovoríme, že diferenciálne rovnice sú ekvivalentné a použitá úprava je ekvivalentná.
Pri úprave diferenciálnej rovnice musíme dávať pozor, či úprava je ekvivalentná.

Diferenciálna rovnica so separovanými premennými.

(5) $\quad P(x) + Q(y).\, y' = 0$

Riešime integrovaním.

Diferenciálna rovnica so separovateľnými premennými.

(6) $\quad P_1(x).\, P_2(y) = Q_1(x).\, Q_2(y).\, y'$

Riešime separovaním a integrovaním.

Homogénna diferenciálna rovnica.

Diferenciálna rovnica
$y' = f(x, y)$ sa nazýva homogénna, ak sa dá zapísať v tvare
(7) $\quad y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Riešenie: po substitúcii $y(x) = u(x).\, x \quad \rightarrow \quad \dfrac{y}{x} = u$ a $y' = u'\, x + u$
dostaneme separovateľnú diferenciálnu rovnicu.

Lineárna diferenciálna rovnica.

(8) $\quad y' + p(x).\, y = q(x)$
pričom funkcie $p(x)$, $q(x)$ sú spojité na intervale (a, b).

Riešenie:
1. Riešime najprv príslušnú lineárnu diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

(9) $\quad y' + p(x).\, y = 0,$
je to separovateľná diferenciálna rovnica.

2. Diferenciálnu rovnicu s pravou stranou

(10) $\quad y' + p(x).\, y = q(x), \qquad q(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
riešime metódou variácie konštanty.

Bernoulliho diferenciálna rovnica.

(11) $\quad y' + p(x).\, y = q(x).\, y^{\alpha}$
pričom funkcie $p(x)$, $q(x)$ sú spojité na intervale (a, b) a $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Riešenie:

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^{\alpha} \;\; /.y^{-\alpha}$$
$$y^{-\alpha}\, y' + y^{1-\alpha}\, p(x) = q(x)$$

po substitúcii $z(x) = y(x)^{(1-\alpha)} \quad \rightarrow \quad z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$
dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu.

2. Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu

(1) $\quad y^{(n)} + a_1(x).\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x).\, y' + a_n(x).\, y = f(x),$

kde $f(x),\ a_i(x),\ i = 1, 2, \ldots n$ sú spojité funkcie na intervale J.

Ak $f(x) = 0$ hovoríme, že rovnica

$$y^{(n)} + a_1(x).\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x).\, y' + a_n(x).\, y = 0$$

je **bez pravej strany** alebo **homogénna**.
Ak $f(x) \neq 0$ hovoríme, že rovnica (1) je s pravou stranou alebo **nehomogénna**.

Lineárna homogénna diferenciálna rovnica n-tého rádu

(2) $\quad y^{(n)} + a_1(x).\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x).\, y' + a_n(x).\, y = 0$

Pri riešení tejto rovnice budeme potrebovať nasledovné pojmy:

Definícia. Hovoríme, že funkcie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ sú **lineárne závislé** na intervale J, ak existuje nenulová k-tica $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ reálnych čísel taká, že

(3) $\quad c_1.\, \varphi_1(x) + c_2.\, \varphi_2(x) + \ldots + c_k.\, \varphi_k(x) = 0, \quad \forall x \in J.$

Ak (3) platí len pre nulovú k-ticu, hovoríme, že funkcie $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_k(x)$ sú **lineárne nezávislé** na intervale J.

Predpokladajme, že funkcie $\varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ majú derivácie až do rádu $(k-1)$ na intervale J. Potom determinant

(4)
$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \ldots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazývame **Wronského determinant** alebo wronskián.

Veta. Ak sú funkcie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ lineárne závislé na intervale J,
potom $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)(x) = 0\ \ \forall\, x \in J$.
Ak $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)(x) \neq 0$ aspoň v jednom čísle z intervalu J,
potom sú funkcie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ lineárne nezávislé na intervale J.

Poznámka. Wronskián n ľubovoľných riešení rovnice (2) sa buď rovná nule pre každé x z intervalu J (riešenia sú lineárne závislé) alebo je rôzny od nuly pre každé x z intervalu J (riešenia sú lineárne nezávislé).

Pre riešenia homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice platia tieto tvrdenia:

1. Ak $y_1,\ y_2$ sú riešenia homogénnej rovnice (2) potom aj $y_1 + y_2$ je riešenie rovnice (2).
2. Ak y_1 je riešenie homogénnej rovnice (2) potom aj cy_1 je riešenie rovnice (2), kde c je ľubovoľná konštanta.
3. Všetky riešenie homogénnej rovnice (2) n-tého rádu tvoria vektorový priestor dimenzie n. Bázu tohoto priestoru tvorí n - lineárne nezávislých riešení
   $y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n$, tzv. **fundamentálny systém riešení**.
   Všeobecné riešenie homogénnej rovnice (2) je

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \quad \text{kde } c_1, c_2, \ldots, c_n \in R.$$

Lineárna nehomogénna diferenciálna rovnica n-tého rádu

$(LP) \qquad y^{(n)} + a_1(x).\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x).\, y' + a_n(x).\, y = f(x),$

odpovedajúca rovnica bez pravej strany

$(L) \qquad y^{(n)} + a_1(x).\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x).\, y' + a_n(x).\, y = 0.$

Všeobecné riešenie y diferenciálnej rovnice (LP) je súčtom všeobecného riešenia $\overline{y}$ diferenciálnej rovnice (L) a partikulárneho riešenia y^* diferenciálnej rovnice (LP).

$$y = \overline{y} + y^*$$

Lagrangeova metóda variácie konštánt

Touto metódou môžeme nájsť partikulárne riešenie y^* diferenciálnej rovnice (LP).

Nech $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (L). Všeobecné riešenie $\overline{y}$ diferenciálnej rovnice (L) je

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i .\, y_i(x), \qquad c_i \in R.$$

Potom partikulárne riešenie y^* diferenciálnej rovnice (LP) je

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} c_i(x).\, y_i(x), \qquad \text{kde} \qquad c_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)}\, dx\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

pričom $W(x) = W_{(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(x)$ je wronskián fundamentálneho systému riešení $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ a $W_i(x)$ dostaneme z $W(x)$ keď zameníme i-ty stĺpec stĺpcom $(0, 0, \ldots, f(x))^T$.

3. Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientami je rovnica

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

kde a_1, a_2, $\ldots a_n$ sú reálne konštanty a $f(x)$ je reálna funkcia definovaná na intervale J.
Ak $f(x) = 0$ hovoríme, že rovnica

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2}$$

je **bez pravej strany** alebo **homogénna**.
Ak $f(x) \neq 0$ hovoríme, že rovnica (1) je s pravou stranou alebo alebo **nehomogénna**.

Lineárne homogénne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

1. rádu

Pre $n = 1$ dostaneme z rovnice (2) rovnicu 1. rádu:

$$y' + a_1 y = 0. \tag{3}$$

Jej riešenie hľadáme v tvare

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x},$$

kde λ je neznáma konštanta.

Ak do rovnice (3) dosadíme

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad y' = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x} + a_1 \mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda + a_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Rovnica (4) sa nazýva **charakteristická rovnica** diferenciálnej rovnice (3).
Jej riešením je

$$\lambda = -a_1.$$

Riešením rovnice (3) je

$$y_1 = \mathrm{e}^{-a_1 x}$$

a všeobecným riešením rovnice (3) je

$$y = c\, \mathrm{e}^{-a_1 x}, \quad c \in R.$$

2. rádu

Pre $n = 2$ dostaneme z rovnice (2) rovnicu 2. rádu:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{5}$$

Jej riešenie hľadáme v tvare

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x},$$

kde λ je neznáma komplexná konštanta.
Ak do rovnice (5) dosadíme

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad y' = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda x}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda x} + a_1 \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x} + a_2 \mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Rovnica (6) sa nazýva **charakteristická rovnica** diferenciálnej rovnice (5). Rovnica (6) je kvadratická rovnica.

Rozlišujeme tri prípady:

1. Rovnica (6) má navzájom rôzne reálne korene λ_1, λ_2.
Potom rovnica (5) má riešenia

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

Tieto riešenia sú lineárne nezávislé. Všeobecné riešenie rovnice (5) je

$$y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in R.$$

2. Rovnica (6) má dvojnásobný reálny koreň λ_1.
Potom rovnica (5) má riešenia

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

Tieto riešenia sú lineárne nezávislé. Všeobecné riešenie rovnice (5) je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \quad c_1, c_2 \in R.$$

3. Rovnica (6) má dva komplexne združené korene $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$.
Vyberieme jeden z týchto koreňov, napríklad

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta.$$

Potom rovnica (5) má komplexné riešenie

$$\widetilde{y} = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{e}^{i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Z vlastností riešení lineárnej diferenciálnej rovnice vyplýva, že reálne riešenia rovnice (5) sú

$$y_1 = \mathrm{Re}\,\widetilde{y} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = \mathrm{Im}\,\widetilde{y} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Tieto riešenia sú lineárne nezávislé. Všeobecné riešenie rovnice (5) je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + c_2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \quad c_1, c_2 \in R.$$

n-tý rád

Uvedené výsledky môžme zovšeobecniť pre diferenciálnu rovnicu (2) n-tého rádu.
Rovnica (2):

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

má riešenia v tvare

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x},$$

kde λ je koreň charakteristickej rovnice

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{7}$$

Všeobecné riešenie rovnice (2) je

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in R,$$

kde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sú lineárne nezávislé riešenia odpovedajúce koreňom charakteristickej rovnice (7).

Veta. Ak charakteristická rovnica (7) má n rôznych reálnych koreňov $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potom funkcie $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ tvoria fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (2).

Veta. Nech λ_0 je k- násobný reálny koreň charakteristickej rovnice (7), $k \geq 2$. Potom funkcie $y_1 = e^{\lambda_0 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$, $\ldots$, $y_k = x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (2).

Veta. Nech charakteristická rovnica (7) má jednoduchý komplexný koreň
$\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ (potom má aj koreň $\overline{\lambda_0} = \alpha - i\beta$). Potom funkcie
$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ sú odpovedajúce dve lineárne nezávislé riešenia rovnice (2).

Veta. Ak charakteristická rovnica (7) má k- násobný komplexný koreň
$\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Potom funkcie
$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $\ldots$, $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$,
$e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\ldots$, $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$,
sú odpovedajúce lineárne nezávislé riešenia rovnice (2). (je ich $2k$)

Lineárna nehomogénna diferenciálna rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientami

$$y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} . y' + a_n . y = f(x), \qquad (L_1P)$$

odpovedajúca rovnica bez pravej strany

$$y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} . y' + a_n . y = 0. \qquad (L_1)$$

Všeobecné riešenie y diferenciálnej rovnice (L_1P) je súčtom všeobecného riešenia $\overline{y}$ diferenciálnej rovnice (L_1) a partikulárneho riešenia y^* diferenciálnej rovnice (L_1P).

$$y = \overline{y} + y^*$$

Partikulárne riešenie y^* diferenciálnej rovnice (L_1P) môžeme nájsť

1. Lagrangeovou metódou variácie konštánt.
2. Metódou neurčitých koeficientov, ak pravá strana rovnice má špeciálny tvar.

Metóda neurčitých koeficientov

Nech diferenciálna rovnica má tvar:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x)\, \mathrm{e}^{\,ax}, \qquad (8)$$

kde $a_1,\ a_2,\ \ldots a_n$ sú reálne čísla, $P_m(x)$ je polynóm stupňa m, a je **komplexné číslo** (môže byť aj reálne, aj rovné nule).

Ak a nie je koreňom charakteristickej rovnice príslušnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany, potom rovnica (8) má partikulárne riešenie

$$y^* = Q_m(x)\ \mathrm{e}^{\,ax}. \qquad (9)$$

Ak a je k-násobným koreňom charakteristickej rovnice príslušnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany, potom rovnica (8) má partikulárne riešenie

$$y^* = x^k\, Q_m(x)\ \mathrm{e}^{\,ax}. \qquad (10)$$

$Q_m(x)$ je neznámy polynóm stupňa m.

V tabuľke 1 sú uvedené partikulárne riešenia y^* rovnice (8), ak pravá strana rovnice má špeciálny tvar a číslo a nie je koreňom charakteristickej rovnice príslušnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany.

pravá strana rovnice (8)	$\mathbf{P_m(x)}$	a	$\mathbf{y^*}$
$U = konštanta$	U	0	$K = konštanta$
$2x + 3$	$2x + 3$	0	$Ax + B$
$\mathrm{e}^{\,2x}$	1	2	$K\ \mathrm{e}^{\,2x}$
$\mathrm{e}^{\,(3+5i)x}$	1	$3 + 5i$	$K\ \mathrm{e}^{\,(3+5i)x}$
$x\ \mathrm{e}^{\,i2x}$	x	2	$(Ax + B)\ \mathrm{e}^{\,i2x}$

Tabuľka 1

V tabuľke 2 sú uvedené partikulárne riešenia y^* rovnice (8), ak pravá strana rovnice má špeciálny tvar a číslo a je jednoduchým koreňom charakteristickej rovnice príslušnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany.

pravá strana rovnice (8)	$\mathbf{P_m(x)}$	a	$\mathbf{y}^*$
$U = konštanta$	U	0	Kx
$2x+3$	$2x+3$	0	$x(Ax+B)$
e^{2x}	1	2	$K\,x\,\mathrm{e}^{2x}$
$\mathrm{e}^{(3+5i)x}$	1	$3+5i$	$K\,x\,\mathrm{e}^{(3+5i)x}$
$x\,\mathrm{e}^{i2x}$	x	2	$x(Ax+B)\,\mathrm{e}^{i2x}$

Tabuľka 2

Ak diferenciálna rovnica má tvar:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \tag{11}$$

alebo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{12}$$

postupujeme pri hľadaní riešenia takto:
Nájdeme riešenie diferenciálnej rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Riešením bude nejaká komplexná funkcia $\widetilde{y}(x)$ reálnej premennej x.
Potom riešením rovnice (11) je reálna funkcia

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{y}$$

a riešením rovnice (12) je reálna funkcia

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{y}.$$

Príklady

Príklad 1. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Riešenie.
Charakteristická rovnica:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Jej korene sú

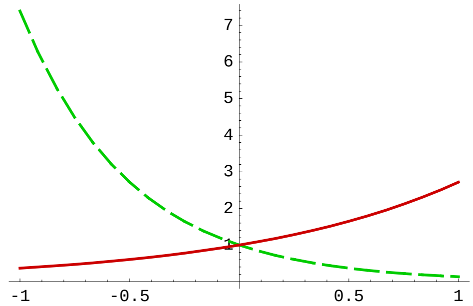
$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$$

Lineárne nezávislé riešenia sú

$$y_1 = \mathrm{e}^{x} \qquad y_2 = \mathrm{e}^{-2x}$$

Všeobecné riešenie je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in R$$



Nájdime teraz riešenie, ktoré spĺňa začiatočné podmienky

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = -5$$

Podmienky dosadíme do

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{\,x} + c_2\,\mathrm{e}^{\,-2x} \qquad y' = c_1\,\mathrm{e}^{\,x} - 2c_2\,\mathrm{e}^{\,-2x}$$

Dostaneme

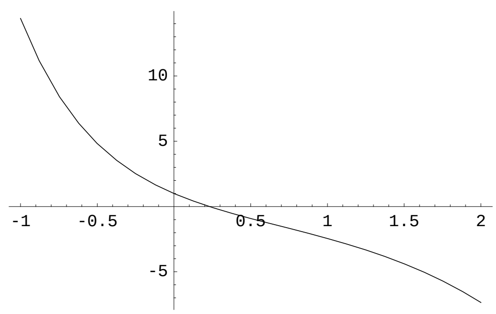
$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c - 2 = -5 \end{gathered}$$

a odtiaľ

$$c_1 = -1 \qquad c_2 = 2$$

Potom riešenie, ktoré spĺňa dané začiatočné podmienky je

$$y = -\,\mathrm{e}^{\,x} + 2\,\mathrm{e}^{\,-2x}$$



Príklad 2. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Riešenie.
Charakteristická rovnica:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

Jej korene sú

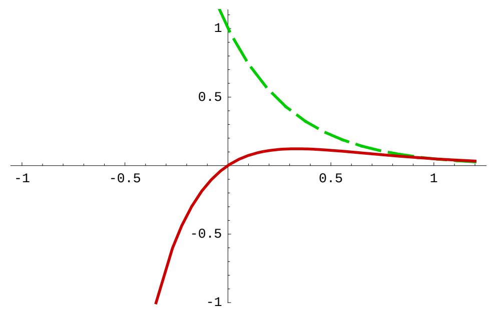
$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -3$$

Lineárne nezávislé riešenia sú

$$y_1 = \,\mathrm{e}^{\,-3x} \qquad y_2 = x\,\mathrm{e}^{\,-3x}$$

Všeobecné riešenie je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{-3x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in R$$



Príklad 3. Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Riešenie.
Charakteristická rovnica:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Jej korene sú

$$\lambda_1 = -1 + 2i \qquad \lambda_2 = -1 - 2i$$

Vyberieme jeden koreň, napríklad $\lambda_1 = -1 + 2i$
Komplexné riešenie je

$$\widetilde{y} = \mathrm{e}^{(-1+2i)x} = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x).$$

Reálne riešenia sú

$$y_1 = \operatorname{Re}\widetilde{y} = \mathrm{e}^{-x}\cos 2x, \qquad y_2 = \operatorname{Im}\widetilde{y} = \mathrm{e}^{-x}\sin 2x.$$

Všeobecné riešenie rovnice je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + c_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin 2x, \quad c_1, c_2 \in R.$$