Riešte diferenciálnu rovnicu

$$\frac{1}{x}u_x + \frac{y}{x^2}u_y = 0, \qquad u(1,y) = \mathrm{e}^{2y}$$

Riešenie: Zostavíme charakteristický systém ODR, v ktorom pravé strany tvoria koeficienty danej PDR:

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{x} \\ y' &= \tfrac{y}{x^2} \end{aligned}$$

Hľadáme tzv. charakteristiky tohto systému, t.j. také krivky $\{(x(\tau), y(\tau)); \tau \in I\}$, ktoré ležia celé v nejakej úrovňovej množine. Po prenásobení prvej rovnice výrazom y, druhej výrazom $-x$ a sčítaní takto upravených rovníc dostávame

$$\begin{aligned} y.x' - x.y' &= 0 \\ \tfrac{y.x' - x.y'}{y^2} &= 0 \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\tfrac{x}{y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Preto

$$\frac{x}{y} = c; \quad c \in \mathbf{R}$$

a krivky v tomto tvare tvoria systém charakteristík. Zároveň vieme, že riešenie danej PDR je konštantné na každej charakteristike a preto riešenie môžeme hľadať v tvare

$$u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

kde f je ľubovoľná funkcia. Funkciu f nájdeme tak, aby bola splnená okrajová podmienka $u(1,y) = \mathrm{e}^{2y}$.

$$u(1,y) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \mathrm{e}^{2y}$$

Označme $\xi = \frac{1}{y}$. Potom $y = \frac{1}{\xi}$ a dostávame predpis funkcie f:

$$f(\xi) = \mathrm{e}^{\frac{2}{\xi}}$$

Preto hľadané riešenie PDR spĺňajúce okrajovú podmienku má tvar:

$$u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2}{\frac{x}{y}}} = \mathrm{e}^{\frac{2y}{x}}.$$