9. Úvod do teorie PDR

A. Základní poznatky o soustavách ODR1

Diferenciální rovnici nazveme *parciální*, jestliže neznámá funkce závisí na dvou či více proměnných (příslušná rovnice tedy obsahuje parciální derivace této hledané funkce). Obecný tvar takové rovnice tedy je

$$F\left(x_1,\dots,x_N,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_N},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\dots,\frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right)=0\,, \tag{9.1}$$

kde $u=u(x_1,\dots x_N)$ je hledaná funkce. Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, pak určuje *řád* této rovnice.

Je-li rovnice (9.1) lineární vzhledem ke hledané funkci a jejím derivacím, pak tuto PDR nazveme *lineární* (zkratka: LPDR). Speciálně, LPDR prvního řádu v rovině, kde neznámou je funkce $u=u(x,y)$, tedy lze vyjádřit v obecném tvaru

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=d(x,y)\,, \tag{9.2}$$

kde a,b,c,d jsou dané funkce dvou proměnných. V souladu s terminologií zavedenou pro lineární ODR nazveme rovnici (9.2) *homogenní*, je-li funkce d identicky nulová na příslušném oboru. V opačném případě ji nazveme *nehomogenní*. Tyto pojmy se pak snadno rozšíří na případ obecné LPDR (zahrnující také lineární rovnice vyššího řádu, příp. lineární rovnice ve vyšší dimenzi).

Definice 9.1. (Řešení PDR) Řešením rovnice (9.1) v oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ nazveme každou funkci, která má v Ω spojité všechny potřebné parciální derivace a která dosazena zároveň s těmito derivacemi do (9.1) vyhovuje pro všechna $(x_1,\dots,x_N)\in\Omega$ této rovnici.

Příklady a) Rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{9.3}$$

je homogenní LPDR1 s konstantními koeficienty. Snadno se přesvědčíme, že „uhádnout“ nějaké její řešení není složité. Stačí např. vymyslet příklad funkce $u=u(x,y)$, pro niž $\partial u/\partial x=1$, $\partial u/\partial y=-1$. Tuto vlastnost má např. funkce $u=x-y$. Snadno ověříme, že tato funkce je skutečně řešením rovnice (9.3) na oblasti $\Omega=\mathbb{R}^2$.

b) Uvažujme homogenní LPDR2 ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0\,. \tag{9.4}$$

I pro tuto rovnici nebude problém nalézt nějaké její řešení. Dvojím integrováním této rovnice (nejprve podle proměnné y a poté podle x) zjistíme, že řešením (9.4) je každá funkce tvořená součtem libovolné spojitě diferencovatelné funkce proměnné x a libovolné spojitě diferencovatelné funkce proměnné y, tj. $u(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$. Tedy např. funkce $u=x+y$ je řešením (9.4) na oblasti $\Omega=\mathbb{R}^2$.

Otázka obecného řešení. V případě obyčejných diferenciálních rovnic byla vyjádřením obecného řešení funkce, která dané rovnici vyhovovala, a která závisela na obecných konstantách, jejichž počet byl dán řádem této rovnice.

Na příkladech rovnic (9.3) a (9.4) však lze snadno nahlédnout, že v případě parciálních rovnic tomu tak není. Již jsme konstatovali, že obecný tvar řešení u rovnice (9.4) lze vyjádřit pomocí vztahu $u=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$ kde φ_1,φ_2 jsou libovolné spojitě diferencovatelné funkce svých argumentů. Podobně lze ukázat, že pro obecný tvar řešení u rovnice (9.3) platí vztah $u=\psi(x-y)$, kde ψ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce. Ukazuje se tedy, že obecný tvar řešení v těchto případech závisí na jedné, resp. několika „libovolných“ funkcích, které přebírají roli obecných konstant v obecném řešení pro ODR. Zdůrazněme však, že tento závěr platí pouze pro speciální typy rovnice (9.1).

Počáteční a okrajové podmínky. K jednoznačnému určení řešení dané PDR je třeba - podobně jako v případě ODR - předepsat doplňující podmínky, které spolu s danou rovnicí tvoří „problém“. Tato úvaha nás vede k formulaci jistých počátečních a okrajových podmínek, jejichž splnění umožní určit řešení dané PDR jednoznačně. Na příkladu rovnice (9.4) ilustrujme, jaký tvar těchto podmínek lze v případě některých jednodušších PDR očekávat.

Předpokládejme, že řešení této rovnice hledáme na čtvercové oblasti

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 < x, y < 1\}\,.$$

V případě uvažované rovnice (9.4) a jejího obecného tvaru řešení $u = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$ je nutno k jednoznačnosti daného řešení specifikovat tvar funkcí φ_1, φ_2. To se podaří např. tehdy, předepíšeme-li hodnoty u na dvou hraničních úsečkách $y = 0$, $0 < x < 1$ a $x = 0$, $0 < y < 1$ oblasti Ω. Nechť tedy např.

$$u(x, 0) = \sin x, \qquad 0 < x < 1 \tag{9.5}$$

a

$$u(0, y) = y^2, \qquad 0 < y < 1\,. \tag{9.6}$$

Dosazením (9.5) do obecného tvaru řešení dostáváme

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(0) = \sin x, \qquad 0 < x < 1\,. \tag{9.7}$$

Podobně dosazením (9.6) máme

$$u(0, y) = \varphi_1(0) + \varphi_2(y) = y^2, \qquad 0 < y < 1\,. \tag{9.8}$$

Porovnáním vztahů (9.7), (9.8) a s přihlédnutím k rovnosti $\varphi_1(0) + \varphi_2(0) = 0$ pak dostáváme jednoznačně určené řešení problému (9.4), (9.5), (9.6) ve tvaru

$$u = \sin x + y^2\,.$$

Je přitom přirozené očekávat, že uvedené řešení daného problému splňuje v Ω rovnici (9.4), je spojité na $\bar{\Omega}$ (tedy včetně všech hraničních úseček) a vyhovuje podmínkám (9.5) – (9.6).

Popisuje-li daná rovnice nějaký děj závislý na čase, přičemž proměnná y má fyzikální význam času, pak podmínka typu (9.5) se nazývá *počáteční podmínka*. Má-li proměnná x význam délkové souřadnice, pak podmínku (9.6) nazýváme *okrajovou podmínkou* a problém (9.4)–(9.6) *počátečním - okrajovým problémem*.

Rovnice eliptického, hyperbolického a parabolického typu. Uvažujme obecnou homogenní LPDR druhého řádu v rovině (tj. $u = u(x, y)$) s konstantními koeficienty

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0\,,$$

kde $A, \dots, F$ jsou reálná čísla. Na základě formální podobnosti s rovnicemi kuželoseček rozlišujeme rovnice tohoto typu na rovnice *eliptické, hyperbolické*, resp. *parabolické*, a to v závislosti na hodnotách koeficientů $A, \dots, F$. Bez dalšího komentáře uvedeme pouze nejzákladnější případy, které jsou „prototypy“ těchto rovnic.

Příkladem rovnice eliptického typu je rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{9.9}$$

Příkladem rovnice hyperbolického typu je rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{9.10}$$

Konečně příkladem rovnice parabolického typu je rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{9.11}$$

Analogicky lze tuto klasifikaci rozšířit na případ, kdy danou LPDR druhého řádu uvažujeme ve vyšší dimenzi. Např. pro $N = 3$ (tj. $u = u(x, y, z)$) jsou příkladem rovnice eliptického, hyperbolického a parabolického typu po řadě rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,, \tag{9.12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,, \tag{9.13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0\,. \tag{9.14}$$

Definice 9.2. (Laplaceův operátor) Rovnici (9.9), resp. (9.12) bývá zvykem zapisovat stručně ve tvaru $\triangle u = 0$, kde

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,, \tag{9.15}$$

resp.

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9.16}$$

je tzv. *Laplaceův* (čteme „Laplasův“) *operátor*. Obecně v prostoru proměnných $x_1, \dots, x_N$ má tento operátor tvar

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}\,.$$

Pomocí Laplaceova operátoru lze jednoduše zapsat i rovnice (9.13), resp. (9.14), a to jako

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \triangle u, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \triangle u\,,$$

kde operátor $\triangle$ je dán vztahem (9.15).

B. Rovnice matematické fyziky

Některé parciální diferenciální rovnice se nazývají *rovnice matematické fyziky*. Důvodem je skutečnost, že tyto rovnice byly odvozeny z fyzikálních principů a popisují (v určitém rozsahu a s určitou přesností) některé fyzikální děje.

Hledaná funkce u, která v těchto rovnicích vystupuje, závisí obvykle na jedné časové proměnné t a na jedné, dvou, nebo třech prostorových proměnných x, y, z. V závislosti na dimenzi prostoru, ve kterém zkoumaný jev probíhá, je pak neznámou funkce $u(x, t)$, $u(x, y, t)$, $u(x, y, z, t)$, příp. ve vyšší dimenzi $u(x_1, \dots, x_N, t)$.

Rovnice vedení tepla v tyči. Uvažujme tyč délky l, která je izolována na povrchu a jejíž průřez pro jednoduchost zanedbáváme. Tyč umístíme na osu x tak, aby její levý konec splýval s počátkem. Předpokládejme dále, že závisle proměnná $u = u(x, t)$ popisuje teplotu tyče v místě x a čase t. Pak lze ukázat, že tato funkce splňuje (po provedení jistých zjednodušení) parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \qquad (x, t) \in (0, l) \times (0, T)\,, \tag{9.17}$$

kde $a^2 = k/(\rho c)$ je tepelná difuzivita, k koeficient tepelné vodivosti, ρ měrná hmotnost, c měrné teplo. Funkce $f(x, t)$ charakterizuje intenzitu vnitřních zdrojů (např. ve vodivé tyči se vyvíjí teplo, prochází-li jí elektrický proud) a T je doba trvání zkoumaného děje (lze připustit i $T = \infty$).

Rovnice (9.17) má nekonečně mnoho řešení. Abychom mohli jednoznačně určit teplotu tyče v libovolné místě a libovolném čase, je třeba k rovnici připojit jednu počáteční podmínku (popisující teplotu tyče na počátku děje) a dvě okrajové podmínky (charakterizující situaci na obou koncích tyče v průběhu celého děje). V nejjednodušším případě lze tyto podmínky popsat vztahy

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g(x), & 0 < x < l, \qquad (9.18)\\ u(0,t) &= h_1(t), & 0 < t < T, \qquad (9.19)\\ u(l,t) &= h_2(t). & 0 < t < T\,. \qquad (9.20) \end{aligned}$$

Podmínky (9.18) – (9.20) tedy popisují situaci, kdy levý konec tyče je udržován na teplotě $h_1(t)$, pravý konec na teplotě $h_2(t)$ (obě funkce se tedy mohou měnit s časem) a na počátku děje je teplota tyče předepsána známou funkcí $g(x)$. O funkcích $g(x)$, resp. $h_1(t), h_2(t)$ budeme přitom předpokládat, že jsou spojité v $\langle 0,l\rangle$, resp. $\langle 0,T\rangle$ a splňují tzv. *podmínky souhlasnosti* $g(0) = h_1(0), \quad g(l) = h_2(0)$.

Řešením počátečního - okrajového problému (9.17) – (9.20) pak rozumíme každou funkci $u(x,t)$, která je řešením rovnice (9.17), je spojitá na $\langle 0,l\rangle \times \langle 0,T\rangle$ (tedy včetně hraničních úseček) a splňuje zde podmínky (9.18) – (9.20).

Rovnice kmitání struny (vlnová rovnice). Uvažujme strunu (tj. dokonale pružné vlákno) o délce l, která je uložena na ose x a napínána silou o konstantní velikosti F. Označme ρ délkovou měrnou hmotnost struny, $u(x,t)$ její vertikální výchylku od rovnovážné polohy v místě x a čase t a $f(x,t)$ případné známé vnější zatížení (např. gravitaci). Pak kmitání této struny popisuje rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (x,t) \in (0,l)\times(0,T)\,, \tag{9.21}$$

kde $a^2 = \frac{F}{\rho}$. Zdůrazněme opět, že rovnice (9.21) popisuje skutečný fyzikální problém pouze přibližně (při odvození rovnice (9.21) je nutné např. předpokládat, že vertikální výchylky struny jsou „malé“).

Nyní k rovnici (9.21) doplníme podmínky. Na rozdíl od rovnice vedení tepla je třeba nyní předepsat dvě počáteční podmínky

$$u(x,0) = g_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_2(x), \qquad 0 < x < l\,, \tag{9.22}$$

které popisují počáteční výchylku a počáteční rychlost struny. Okrajové podmínky lze opět zachytit např. vztahy (9.19), (9.20), popisujícími chování struny na koncích.

Pojem řešení počátečního - okrajového problému (9.21), (9.22), (9.19), (9.20) se nyní zavede analogicky jako pro rovnici vedení tepla.

Rovnice vedení tepla a vlnová rovnice ve vyšší dimenzi. Jsou tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\triangle u + f\,,$$

resp.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\triangle u + f\,,$$

kde $\triangle$ je Laplaceův operátor. V závislosti na prostorové dimenzi tyto rovnice popisují vedení tepla, resp. šíření vln v prostorech vyšší dimenze. Poznamenejme, že kromě uvedených rovnic je třeba v těchto problémech modifikovat do příslušné dimenze také počáteční a okrajové podmínky.

Laplaceova a Poissonova rovnice. Ve fyzikálních problémech, které popisovaly předcházející rovnice, lze hledat ustálený (tj. na čase nezávislý) stav. V případě rovnice pro vedení tepla tedy uvažujeme situaci, kdy se teplota v čase již nemění. Podobně v případě vlnové rovnice se kmitání struny nebo membrány mění na deformaci (průhyb).

Snadno vidíme, že rovnice vedení tepla i vlnová rovnice nabývají v uvedeném stacionárním případě formálně stejného tvaru

$$-\triangle u = f\,, \tag{9.23}$$

kde $\triangle$ je Laplaceův operátor a f je daná funkce proměnných $x_1,\ldots,x_N$. Rovnice (9.23) se nazývá *Poissonova* (čteme „Poasonova“). V rovinném případě $N = 2$ je tato rovnice tedy tvaru

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)\,.$$

Speciálním případem Poissonovy rovnice (9.23) je *Laplaceova rovnice*

$$\triangle u = 0\,,$$

která je Poissonovou rovnicí pro $f \equiv 0$. V rovinném případě je tato rovnice tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \, .$$

Poznamenejme, že obě rovnice mají - kromě výše uvedeného fyzikálního významu - řadu dalších interpretací. Poissonova rovnice např. popisuje potenciální proudění tekutiny tenkou vrstvou proměnné šířky (u je zde potenciál vektoru rychlosti a f vyjadřuje proměnnost tloušťky vrstvy tekutiny). V případě konstantní šířky je funkce f identicky nulová, a daný problém tedy modeluje Laplaceova rovnice. K oběma rovnicím dospějeme rovněž při studiu elektrického potenciálu, problému šíření příměsi difúzí a v dalších úlohách.

Protože pro tyto rovnice nemají počáteční podmínky smysl, uvažujeme pouze podmínky okrajové. Nejjednodušším typem okrajové podmínky je Dirichletova okrajová podmínka

$$u = h \qquad \text{na } \Gamma \, ,$$

která předepisuje hodnoty řešení na hranici Γ oblasti Ω, v níž danou rovnici uvažujeme.

C. Řešení PDR Fourierovou metodou

Získat řešení PDR v exaktním tvaru lze velmi zřídka. Existují nicméně metody, které pro speciální typy problémů umožňují řešení nalézt. V tomto oddíle se seznámíme s tzv. *Fourierovou metodou*, nazývanou také *metoda vlastních funkcí* nebo *metoda separace proměnných*. Při aplikaci této metody vyjde řešení ve tvaru Fourierovy řady (odtud plyne také název metody). Myšlenku metody vysvětlíme na příkladu.

Řešení rovnice vedení tepla Fourierovou metodou. Mějme tento počáteční - okrajový problém pro rovnici vedení tepla v tyči (tedy v jedné dimenzi):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x,t) \in (0,l) \times (0,T) \, , \tag{9.24}$$

$$u(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < l, \tag{9.25}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T \, , \tag{9.26}$$

kde $g(x)$ je spojitá funkce mající po částech spojitou derivaci na $\langle 0, l \rangle$. Problém (9.24) – (9.26) lze interpretovat např. jako rovnici vedení tepla v tenké na povrchu izolované tyči o počáteční teplotě $g(x)$, jejíž konce jsou ponořeny v nádobě obsahující směs vody a ledu.

Při řešení problému (9.24) – (9.26) začneme s touto pomocnou úlohou:

Najít všechna řešení rovnice (9.24), která nejsou identicky rovna nule, vyhovují okrajovým podmínkám (9.26) a která lze psát ve tvaru

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \, . \tag{9.27}$$

Vyřešíme tedy nejprve tento pomocný problém. Dosazením (9.27) do (9.24) a vydělením získaného vztahu součinem a^2XT dostaneme

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \, . \tag{9.28}$$

Protože rovnost (9.28) platí pro všechna uvažovaná t a x, přičemž levá strana je funkcí proměnné t a pravá strana funkcí proměnné x, musí být obě funkce konstantní, a obě strany rovnice tedy jsou rovny téže konstantě, kterou je třeba určit. Označíme ji $-\lambda$ (znaménko minus je zde pouze z jistých početních důvodů a neznamená, že uvedená hodnota musí být záporná). Ze vztahu (9.28) potom dostáváme tyto dvě LODR:

$$\dot{T}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \, , \tag{9.29}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \, . \tag{9.30}$$

Dosadíme-li dále (9.27) do (9.26), potom požadavek netriviálnosti řešení ve tvaru (9.27) dá okrajové podmínky

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \, . \tag{9.31}$$

Vzhledem k předpokladu netriviálnosti funkce $u(x,t)$ tedy hledáme nenulové řešení okrajového problému (9.30), (9.31). Podobnými úvahami jako v kapitole *Okrajový problém pro LODR2* lze zjistit, že *nenulové* řešení tohoto problému existuje pouze pro hodnoty $\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k = 1, 2, \dots$, přičemž odpovídající nenulová řešení problému (9.30), (9.31) jsou pak tvaru

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x\,, \quad k = 1, 2, \dots\,. \tag{9.32}$$

Zbývá nalézt ke každé hodnotě λ_k funkci $T_k(t)$, která vyhovuje (9.29), dosadíme-li za λ právě hodnotu λ_k. Budeme tedy řešit rovnici

$$\dot{T}_k(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0\,.$$

Separujme proměnné

$$\frac{\mathrm{d}T_k}{T_k} = -\lambda_k a^2 \,\mathrm{d}t\,.$$

Odtud

$$T_k(t) = A_k \mathrm{e}^{-\lambda_k a^2 t}\,. \tag{9.33}$$

Podle (9.27) tedy dostáváme nekonečně mnoho řešení $u_k(x,t)$ našeho pomocného problému ve tvaru

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x\, \mathrm{e}^{-a^2k^2\pi^2 t/l^2}\,.$$

Řešení původního problému (9.24) – (9.26) hledejme nyní ve tvaru nekonečné řady

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x\, \mathrm{e}^{-a^2k^2\pi^2 t/l^2}\,, \tag{9.34}$$

kde koeficienty A_k určíme dosazením počáteční podmínky (9.25) do (9.34), tj.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x)\,.$$

Z teorie Fourierových řad plyne vyjádření pro A_k:

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \,\mathrm{d}x\,.$$

Je však třeba zdůraznit, že řešení problému (9.24) – (9.26) jsme dostali pouze formálně, a to ve tvaru nekonečné řady (9.34). Je tedy nutno se zabývat otázkou, zda součet řady (9.34) splňuje jak diferenciální rovnici (9.24), tak i příslušné podmínky. V obecném případě (tj. pro obecnou funkci $g(x)$) tento požadavek není splněn (např. součet řady (9.34) nemusí mít ani derivace podle x a podle t, a tedy do dané rovnice nelze tento součet vůbec dosadit). V takovém případě uvažujeme pouze konečný součet řady (9.34), který splňuje přesně danou rovnici (9.24) a okrajové podmínky (9.26), a nepřesně splňuje počáteční podmínky (9.25). Je však přirozené očekávat, že sečteme-li dostatečně mnoho členů řady, pak lze tuto nepřesnost tolerovat.

Obecnější použití Fourierovy metody. Fourierovu metodu řešení počátečních - okrajových problémů pro PDR lze užít jednak pro jiné typy rovnic (např. vlnovou rovnici), nebo i v obecnějších souvislostech. Bez větších obtíží ji lze zobecnit např. na případ nehomogenní rovnice vedení tepla s nehomogenními okrajovými podmínkami nebo na případ, kdy uvažovaná PDR je lineární rovnicí s nekonstantními koeficienty. Potíže rovněž nečiní ani případné zavedení Neumannových okrajových podmínek do uvedených problémů.

Shrnutí poznatků

Diferenciální rovnice se nazývá parciální, jestliže neznámá funkce závisí na dvou nebo více proměnných. Některé pojmy (řád rovnice, linearita rovnice, řešení rovnice) se zavádějí analogicky jako v případě ODR. V jiných případech je však obtížné pojmy teorie ODR přenést do teorie PDR (např. pojem obecného řešení), nebo je třeba tyto pojmy modifikovat (např. počáteční - okrajový problém).

Mezi nejznámější PDR patří tzv. rovnice matematické fyziky, tedy rovnice vedení tepla, vlnová rovnice a Piossonova rovnice. Popisují některé fyzikální děje, související s názvy těchto rovnic, v nichž hledaná veličina (teplota, průhyb) závisí obvykle na jedné nebo několika prostorových proměnných, a s výjimkou Poissonovy rovnice také na časové proměnné. Řešení počátečních - okrajových problémů pro tyto rovnice lze ve speciálních případech určit ve tvaru součtu Fourierovy řady.