Príklad. Riešte nasledujúci systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & 4y_1 & - & y_2 & + & t \\ y_2' & = & y_1 & + & 2y_2 & + & 2 \end{array}$$

Riešenie. Najskôr vyriešime príslušný homogénny systém. Jeho matica koeficientov je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jej vlastné hodnoty dostaneme riešením charakteristickej rovnice

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Táto rovnica má dvojnásobný koreň $\lambda = 3$. Vlastný vektor prislúchajúci $\lambda = 3$ nájdeme ako riešenie systému lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcr} k_1 & - & k_2 & = & 0 \\ k_1 & - & k_2 & = & 0 \end{array}$$

Ak zvolíme $k_1 = 1$, potom $k_2 = 1$ a teda vlastný vektor je $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Príslušné riešenie homogénneho systému je

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$$

Potrebujeme nájsť ešte jedno riešenie, ktoré bude lineárne nezávislé s $\vec{y}_1$. Hľadáme ho v tvare

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$$

Po dosadení do homogénneho systému dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3(a_0 + a_1 t) & + & a_1 & = & 4(a_0 + a_1 t) & - & (b_0 + b_1 t) \\ 3(b_0 + b_1 t) & + & b_1 & = & (a_0 + a_1 t) & + & 2(b_0 + b_1 t) \end{array}$$

Odtiaľ máme

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3a_0 & + & a_1 & = & 4a_0 & - & b_0 \\ 3b_0 & + & b_1 & = & a_0 & + & 2b_0 \\ & & 3a_1 & = & 4a_1 & - & b_1 \\ & & 3b_1 & = & a_1 & + & 2b_1 \end{array}$$

Môžme zvoliť $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$. Potom $b_0 = -1$ a $b_1 = 1$. Dostávame

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} t \\ -1 + t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}$$

Všeobecné riešenie homogénneho systému je potom

$$\vec{y}_L = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -1+t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2 t\mathrm{e}^{3t} \\ c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2(-1+t)\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}, & t\mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t}, & (-1+t)\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in R$$

Teraz musíme nájsť jedno partikulárne riešenie nehomogénneho systému. Použijeme metódu variácie konštánt a hľadáme ho v tvare

$$y^* = c_1(t)\vec{y}_1 + c_2(t)\vec{y}_2,$$

kde koeficienty $c_1(t), c_2(t)$ určíme pomocou Wronskiánov ako

$$c_1 = \int \frac{W_1}{W}\,\mathrm{d}t, \qquad c_2 = \int \frac{W_2}{W}\,\mathrm{d}t$$

a

$$W(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3t}, & t\mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t}, & (-1+t)\mathrm{e}^{3t} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{6t}(-1+t-t) = -\mathrm{e}^{6t}$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} t, & t\mathrm{e}^{3t} \\ 2, & (-1+t)\mathrm{e}^{3t} \end{vmatrix} = t(t-1)\mathrm{e}^{3t} - 2t\mathrm{e}^{3t} = (t^2-3t)\mathrm{e}^{3t}$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{3t}, & t \\ \mathrm{e}^{3t}, & 2 \end{vmatrix} = (2-t)\mathrm{e}^{3t}$$

Po dosadení dostávame

$$c_1(t) = \int \frac{(t^2-3t)\mathrm{e}^{3t}}{-\mathrm{e}^{6t}}\,\mathrm{d}t = -\int (t^2-3t)\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t^2-3t, & v' = \mathrm{e}^{-3t} \\ u' = 2t-3, & v = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}(t^2-3t) - \int (-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t})(2t-3)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}(t^2-3t) + \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-3t}(2t-3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2t-3, & v' = \mathrm{e}^{-3t} \\ u' = 2, & v = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}(t^2-3t) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}(2t-3) + \frac{1}{3}\int 2\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}(t^2-3t) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}(2t-3) + \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})\mathrm{e}^{-3t}\right) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\left(-t^2 + \frac{7}{3}t + \frac{5}{9}\right)$$

a

$$c_2(t) = \int \frac{(2-t)\mathrm{e}^{3t}}{-\mathrm{e}^{6t}}\,\mathrm{d}t = \int (t-2)\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = t-2, & v' = \mathrm{e}^{-3t} \\ u' = 1, & v = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t} \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{d}t = (2-t)\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{17}{9} - t\right)$$

Čiže

$$y^* = c_1(t)\vec{y}_1 + c_2(t)\vec{y}_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\left(-t^2 + \frac{7}{3}t + \frac{5}{9}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{17}{9} - t\right)\begin{pmatrix} t \\ -1+t \end{pmatrix}\mathrm{e}^{3t} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{9}t - \frac{5}{27} \\ -\frac{4}{3}t^2 + \frac{19}{9}t - \frac{56}{27} \end{pmatrix}$$

Všeobecné riešenie nehomogénneho systému DR je

$$\vec{y} = \vec{y}_L + \vec{y}^* =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2 t\mathrm{e}^{3t} \\ c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2(-1+t)\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{9}t - \frac{5}{27} \\ -\frac{4}{3}t^2 + \frac{19}{9}t - \frac{56}{27} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2 t\mathrm{e}^{3t} - \frac{4}{3}t^2 + \frac{10}{9}t - \frac{5}{27} \\ c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2(-1+t)\mathrm{e}^{3t} - \frac{4}{3}t^2 + \frac{19}{9}t - \frac{56}{27} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in R$$