Príklad. Riešte nasledujúci systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{array}{lcrcrr} y_1' & = & -y_1 & + & y_2 & \\ y_2' & = & & - & y_2 & +4y_3 \\ y_3' & = & y_1 & & & -4y_3 \end{array}$$

Riešenie. Matica koeficientov systému je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Jej vlastné hodnoty dostaneme riešením charakteristickej rovnice

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$$

Táto rovnica má dvojnásobný koreň $\lambda_1 = -3$ a jednoduchý koreň $\lambda_2 = 0$. Riešenie prislúchajúce k dvojnásobnému koreňu $\lambda_1 = -3$ má tvar:

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x \\ b_1 + b_2 x \\ c_1 + c_2 x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x},$$

kde koeficienty $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ určíme tak, aby $\vec{y}_1$ bolo riešením danej sústavy diferenciálnych rovníc. Keďže

$$(\vec{y}_1)' = \begin{pmatrix} a_2 - 3(a_1 + a_2 x) \\ b_2 - 3(b_1 + b_2 x) \\ c_2 - 3(c_1 + c_2 x) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x},$$

po dosadení do sústavy dif. rovníc a porovnaní koeficientov dostávame nasledujúci systém lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2a_1 & - & a_2 & + & b_1 & = & 0 \\ 2b_1 & - & b_2 & + & 4c_1 & = & 0 \\ -c_1 & - & c_2 & + & a_1 & = & 0 \\ & & 2a_2 & + & b_2 & = & 0 \\ & & 2b_2 & + & 4c_2 & = & 0 \\ & & -c_2 & + & a_2 & = & 0 \end{array}$$

Toto je sústava lineárnych rovníc so šiestimi neznámymi, ktorej matica má hodnosť 4. Dve neznáme môžeme preto voliť ako parameter.

Zvolíme $a_1 = C_1$ a $a_2 = C_2$. Ostatné neznáme vyjadríme pomocou týchto parametrov nasledovne:

$$b_2 = -2C_2, \quad c_2 = C_2, \quad b_1 = C_2 - 2C_1, \quad c_1 = C_1 - C_2$$

Dostávame

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} C_1 + C_2x \\ C_2 - 2C_1 - 2C_2x \\ C_1 - C_2 + C_2x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in R$$

Vlastnému číslu $\lambda_2 = 0$ prislúcha konštantné riešenie sústavy diferenciálnych rovníc. Hľadáme ho preto v tvare

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Po dosadení do sústavy dif. rovníc dostaneme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & a & + & b & & \\ 0 & = & & - & b & +4c \\ 0 & = & a & & & -4c \end{array}$$

Ak zvolíme $c = C_3$ dostávame $a = 4C_3$ a $b = 4C_3$. Máme teda

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 4C_3 \\ 4C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad C_3 \in R$$

a všeobecné riešenie danej sústavy dif. rovníc je

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2x \\ C_2 - 2C_1 - 2C_2x \\ C_1 - C_2 + C_2x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3x} + \begin{pmatrix} 4C_3 \\ 4C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in R$$