Príklad. Riešte diferenciálnu rovnicu:

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$$

Riešenie. Vyriešime najskôr rovnicu bez pravej strany. Jej charakteristická rovnica je nasledovná:

$$r^3 - 2r^2 + r = 0$$

po rozklade

$$r(r-1)^2 = 0$$

vidíme, že má jednoduchý koreň 0 a dvojnásobný koreň 1. Fundamentálny systém riešení je teda

$$\{1, \mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x\}$$

a teda všeobecné riešenie rovnice bez pravej strany je

$$y_L = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3 x\mathrm{e}^x \quad c_1, c_2, c_3 \in R$$

Pravá strana rovnice je v špeciálnom tvare $(P(x)\sin\beta x + Q(x)\cos\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ sú nultého stupňa, $\alpha = 0$ a $\beta = 1$. Pritom $0 + 1i = i$ nie je koreňom charakteristickej rovnice. Partikulárne riešenie preto budeme hľadať v tvare

$$y^* = A\sin x + B\cos x,$$

kde konštanty A a B musia spĺňať danú diferenciálnu rovnicu. Skôr, než y^* dosadíme do rovnice, pripravíme si derivácie do tretieho rádu:

$$(y^*)' = A\cos x - B\sin x$$

$$(y^*)'' = -A\sin x - B\cos x$$

$$(y^*)''' = -A\cos x + B\sin x$$

Po dosadení do diferenciálnej rovnice s pravou stranou dostávame

$$A\cos x - B\sin x + 2A\sin x + 2B\cos x - A\cos x + B\sin x = 4\sin x + 4\cos x$$

Porovnaním koeficientov na oboch stranách rovnice pri $\sin x$ a $\cos x$ máme $A = 2$ a $B = 2$ a teda

$$y^* = 2\sin x + 2\cos x$$

Všeobecné riešenie rovnice s pravou stranou je

$$y = y_L + y^* = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3 x\mathrm{e}^x + 2\sin x + 2\cos x$$

Ešte musíme nájsť také riešenie, ktoré by spĺňalo počiatočné podmienky $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$. Dosadíme preto hodnotu 0 do príslušných derivácií všeobecného riešenia a dostaneme

$$y(0) = c_1 + c_2\mathrm{e}^0 + c_3.0.\mathrm{e}^0 + 2\mathrm{sin}0 + 2\mathrm{cos}0 = c_1 + c_2 + 2 = 1$$

$$y'(0) = c_2\mathrm{e}^0 + c_3.(\mathrm{e}^0 + 0.\mathrm{e}^0) + 2\mathrm{cos}0 - 2\mathrm{sin}0 = c_2 + c_3 + 2 = 0$$

$$y''(0) = c_2\mathrm{e}^0 + c_3.(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 + 0.\mathrm{e}^0) - 2\mathrm{sin}0 - 2\mathrm{cos}0 = c_2 + 2c_3 - 2 = -1$$

Riešime sústavu troch lineárnych rovníc s troma neznámymi c_1, c_2, c_3.

$$\begin{aligned} 1.c_1 + 1.c_2 + 0.c_3 &= -1 \\ 0.c_1 + 1.c_2 + 1.c_3 &= -2 \\ 0.c_1 + 1.c_2 + 2.c_3 &= 1 \end{aligned}$$

Dostávame riešenie $c_1 = 4, c_2 = -5, c_3 = 3$. Riešenie danej diferenciálnej rovnice spĺňajúce počiatočné podmienky je teda

$$y = 4 - 5\mathrm{e}^x + 3x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{sin}x + 2\mathrm{cos}x$$