Príklad. Riešte diferenciálnu rovnicu:

$$y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$$

Riešenie. Vyriešime najskôr rovnicu bez pravej strany. Jej charakteristická rovnica je nasledovná:

$$r^3 + r^2 = 0$$

Z rozkladu

$$r^2(r+1) = 0$$

máme tri riešenia: dvojnásobný koreň 0 a jednoduchý koreň -1. Týmto koreňom prislúcha nasledujúci fundamentálny systém riešení rovnice bez pravej strany:

$$\left\{1, x, \mathrm{e}^{-x}\right\}$$

a teda všeobecné riešenie rovnice bez pravej strany je

$$y_L = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} \quad c_1, c_2, c_3 \in R$$

Metódou variácie konštánt hľadáme partikulárne riešenie rovnice s pravou stranou v tvare:

$$y^* = c_1(x) + c_2(x)x + c_3(x)\mathrm{e}^{-x}$$

pričom funkcie $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ určíme pomocou Wronskiánov ako

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x, \quad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x, \quad c_3(x) = \int \frac{W_3(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x$$

kde

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & \mathrm{e}^{-x} \\ 0 & 1 & -\mathrm{e}^{-x} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & \mathrm{e}^{-x} \\ 0 & 1 & -\mathrm{e}^{-x} \\ \frac{x-1}{x^2} & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{-x}\frac{x-1}{x} - \mathrm{e}^{-x}\frac{x-1}{x^2} = -\mathrm{e}^{-x}\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathrm{e}^{-x} \\ 0 & 0 & -\mathrm{e}^{-x} \\ 0 & \frac{x-1}{x^2} & \mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-x}\frac{x-1}{x^2}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Dostávame

$$c_1(x) = \int -\frac{x^2-1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - x$$

$$c_2(x) = \int \frac{x-1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}x = \ln|x| + \frac{1}{x}$$

$$c_3(x) = \int \mathrm{e}^x \frac{x-1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \frac{1}{x}$$

a teda

$$y^* = -\frac{1}{x} - x + x\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x\frac{1}{x} = -x + x\ln|x| + 1$$

Všeobecné riešenie rovnice s pravou stranou je

$$y = y_L + y^* = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x} - x + x\ln|x| + 1, \quad c_1, c_2, c_3 \in R$$