

Hornerovo schéma

© ÚM FSI VUT v Brně

31. července 2007

Příklad 1. Rozložte polynom

$x^5 + 2x^3 - 4x^4 + 2x^2 + x + 6$ na součin kořenových činitelů.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

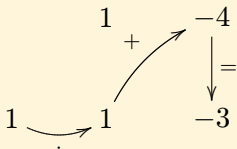
Řešení: Připomeňme Hornerovo schéma. Mějme polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Testujeme číslo b_0 , zda je kořenem polynomu P_n (tj. zda $P_n(b_0) = 0$). Sestavíme následující tabulku:

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0
b_0	a_n	$\underbrace{b_0 \cdot a_n + a_{n-1}}_{b_n}$	\dots	$\underbrace{b_0 \cdot b_3 + a_1}_{b_2}$	$\underbrace{b_0 \cdot b_2 + a_0}_{b_1}$

Pokud je $b_1 = 0$, je b_0 kořenem polynomu $P_n(x)$. Pokud je $b_1 \neq 0$, pak b_0 není kořenem $P_n(x)$ a b_1 je hodnota zbytku po dělení $(x - b_0)$. Je vhodné tipovat jako kořeny dělitele absolutního členu $P_n(x)$, tedy členu a_0 .

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

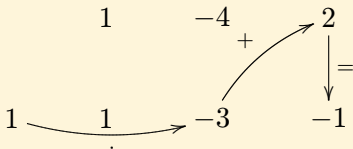
Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1. Dostaneme následující tabulku:



1. krok v tabulce

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1. Dostaneme následující tabulku:



2. krok

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

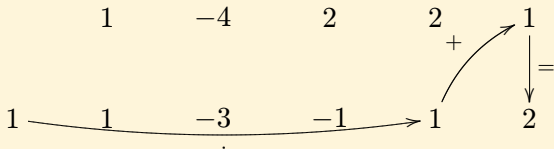
Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1. Dostaneme následující tabulku:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & -4 & 2 & & 2 & \\ & & & + & \nearrow & & \\ 1 & 1 & -3 & -1 & & 1 & \\ & & & & & \downarrow = & \end{array}$$

3. krok

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1. Dostaneme následující tabulku:



4. krok

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1. Dostaneme následující tabulku:

	1	-4	2	2	1	6
					+	↗
1	1	-3	-1	1	2	8
						↓ =

5. krok. Je tedy zřejmé, že číslo 1 není kořenem zadaného polynomu.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo -1. Dostaneme následující tabulku:

	1	-4	2	2	1	6
-1	1	-5	7	-5	6	0

Číslo -1 je kořenem, zadaný polynom lze tedy dělit kořenovým činitelem $(x + 1)$.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení:

$$\begin{array}{r} (x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6) : (x + 1) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(x^5 + x^4)} \\ (-5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6) \\ \underline{-(-5x^4 - 5x^3)} \\ (7x^3 + 2x^2 + x + 6) \\ \underline{-(7x^3 + 7x^2)} \\ (-5x^2 + x + 6) \\ \underline{-(-5x^2 - 5x)} \\ (6x + 6) \end{array}$$

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dále se tedy budeme zabývat polynomem

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$. Vezměme číslo 2 jako možný kořen. Pak příslušná tabulka Hornerova schématu bude vypadat takto:

	1	-5	7	-5	6
2	1	-3	1	-3	0

2 je tedy kořenem, opět dělíme polynomy.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Další kořen je 2, dělíme tedy činitelem $(x - 2)$:

$$\begin{array}{r} (x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ \underline{-(x^4 - 2x^3)} \\ -3x^3 + 7x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(-3x^3 + 6x^2)} \\ x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(x^2 - 2x)} \\ -3x + 6 \end{array}$$

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dále se zabýváme polynomem $x^3 - 3x^2 + x - 3$, má smysl tedy otestovat číslo 3. Tabulka bude vypadat takto:

	1	-3	1	-3
3	1	0	1	0

3 je tedy opět kořenem, provedeme další dělení.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělíme kořenovým činitelem $(x - 3)$:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3) = x^2 + 1 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline x - 3 \end{array}$$

Polynom $x^2 + 1$ je již nerozložitelný nad \mathbb{R} .

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení:

$$x^5 + 2x^3 - 4x^4 + 2x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$$