Hornerovo schéma

31. července 2007

Příklad 1. Rozložte polynom $x^5 + 2x^3 - 4x^4 + 2x^2 + x + 6$ na součin kořenových činitelů.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Připomeňme Hornerovo schéma. Mějme polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Testujeme číslo b_0, zda je kořenem polynomu P_n (tj. zda $P_n(b_0) = 0$. Sestavíme následující tabulku:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
b_0	a_n	$\underbrace{b_0 \cdot a_n + a_{n-1}}_{b_n}$	$\cdots$	$\underbrace{b_0 \cdot b_3 + a_1}_{b_2}$	$\underbrace{b_0 \cdot b_2 + a_0}_{b_1}$

Pokud je $b_1 = 0$, je b_0 kořenem polynomu $P_n(x)$. Pokud je $b_1 = neq 0$, pak b_0 není kořenem $P_n(x)$ a b_1 je hodnota zbytku po dělení $(x - b_0)$. Je vhodné tipovat jako kořeny dělitele absolutního členu $P_n(x)$, tedy členu a_0.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1.Dostaneme následující tabulku:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & -4 \arrow[d, "="] \\
1 \arrow[r, bend right, "\cdot"'] & 1 \arrow[ur, bend left, "+"] & -3
\end{tikzcd}$$

1. krok v tabulce

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1.Dostaneme následující tabulku:

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 & -4 & 2 \arrow[d, "="] \\
1 \arrow[rr, bend right, "\cdot"'] & 1 & -3 \arrow[ur, bend left, "+"] & -1
\end{tikzcd}
$$

2. krok

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1.Dostaneme následující tabulku:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}$$

3. krok

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1.Dostaneme následující tabulku:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & -4 & 2 & 2 & 1 \\
 & & & & + & \downarrow = \\
1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 2 \\
 & & \cdot & & &
\end{array}$$

4. krok

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo 1.Dostaneme následující tabulku:

	1	-4	2	2	1	6
1	1	-3	-1	1	2	8

5. krok. Je tedy zřejmé, že číslo 1 není kořenem zadaného polynomu.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělitelé 6 jsou čísla 1,2,3 (a jejich záporné varianty). Vezměme číslo -1.Dostaneme následující tabulku:

	1	-4	2	2	1	6
-1	1	-5	7	-5	6	0

Číslo-1 je kořenem, zadaný polynom lze tedy dělit kořenovým činitelem $(x+1)$.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení:

$$
\begin{array}{r}
(x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6) \quad : \quad (x+1) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^5 + x^4)} \\
(-5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6) \\
\underline{-(-5x^4 - 5x^3)} \\
(7x^3 + 2x^2 + x + 6) \\
\underline{-(7x^3 + 7x^2)} \\
(-5x^2 + x + 6) \\
\underline{-(-5x^2 - 5x)} \\
(6x + 6)
\end{array}
$$

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dále se tedy budeme zabývat polynomem

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$. Vezměme číslo 2 jako možný kořen. Pak příslušná tabulka Hornerova schématu bude vypadat takto:

	1	-5	7	-5	6
2	1	-3	1	-3	0

2 je tedy kořenem, opět dělíme polynomy.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Další kořen je 2, dělíme tedy činitelem $(x-2)$:

$$
\begin{array}{r}
(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6) \quad : \quad (x-2) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
\underline{-(x^4 - 2x^3)} \\
-3x^3 + 7x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(-3x^3 + 6x^2)} \\
x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^2 - 2x)} \\
-3x + 6
\end{array}
$$

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dále se zabýváme polynomem $x^3 - 3x^2 + x - 3$, má smysl tedy otestovat číslo 3. Tabulka bude vypadat takto:

	1	-3	1	-3
3	1	0	1	0

3 je tedy opět kořenem, provedeme další dělení.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení: Dělíme kořenovým činitelem $(x-3)$:

$$\begin{array}{rcl} (x^3 - 3x^2 + x - 3) & : & (x-3) = x^2 + 1 \\ \underline{-(x^3 - 3x^2)} & & \\ x - 3 & & \end{array}$$

Polynom $x^2 + 1$ je již nerozložitelný nad $\mathbb{R}$.

Příklad 1. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$

Řešení:

$$x^5 + 2x^3 - 4x^4 + 2x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)(x^2+1)$$