Príklad 1. Riešte diferenciálnu rovnicu:

$$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

Riešenie. Zavedieme substitúciu $y' = u$. Daná diferenciálna rovnica prejde do tvaru

$$(1+x^2)u' + u^2 + 1 = 0$$

čo je separovateľná rovnica prvého rádu s neznámou funkciou $u = u(x)$. Po separácii premenných dostávame:

$$\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Odtiaľ

$$\mathrm{arctg}u = -\mathrm{arctg}x + c, \qquad c \in R$$

$$u = \mathrm{tg}(c - \mathrm{arctg}x)$$

Pomocou súčtového vzorca $\mathrm{tg}(x-y) = \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y}$ dostávame

$$u = \frac{k-x}{1+kx}, \quad k = \mathrm{tg}c \in R$$

Po návrate k substitúcii máme

$$y = \int u\mathrm{d}x = \int \frac{k-x}{1+kx}\mathrm{d}x = \ln|1+kx| - \frac{1}{k}\left(x - \frac{1}{k}\ln|1+kx|\right) + l =$$

$$= \ln|1+kx|\left(1+\frac{1}{k^2}\right) - \frac{x}{k} + l, \qquad k, l \in R$$

Príklad 2. Pomocou substitúcie $y = y_1 \int u \; \mathrm{d}x$, kde y_1 je známe riešenie diferenciálnej rovnice, znížte rád a riešte diferenciálnu rovnicu:

$$y'' - y'\mathrm{tg}x + 2y = 0, \qquad y_1 = \sin x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Riešenie. Ak $y = \sin x \int u \; \mathrm{d}x$, potom

$$y' = \cos x \int u \; \mathrm{d}x + u\sin x$$

a

$$y'' = -\sin x \int u \, \mathrm{d}x + u\cos x + u'\sin x + u\cos x =$$

$$= -\sin x \int u \, \mathrm{d}x + 2u\cos x + u'\sin x$$

Po dosadení do pôvodnej rovnice dostávame

$$-\sin x \int u \, \mathrm{d}x + 2u\cos x + u'\sin x - \left(\cos x \int u \, \mathrm{d}x + u\sin x\right) \frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x \int u \, \mathrm{d}x = 0$$

a po úprave

$$u'\sin x + u\left(2\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = 0$$

čo je separovateľná diferenciálna rovnica. Po separácii premenných máme

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 2\frac{\cos x}{\sin x}\right) \, \mathrm{d}x$$

a teda

$$\ln|u| = -\ln|\cos x| - 2\ln|\sin x| + \ln c, \quad c \in R^+$$

preto

$$u = \frac{k}{\sin^2 x \cos x}, \quad k \in R$$

Po návrate k substitúcii dostávame riešenie pôvodnej rovnice

$$y = \sin x \int \frac{k}{\sin^2 x \cos x} \, \mathrm{d}x = k\sin x \left(-\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + l\right) =$$

$$= -k + kl\sin x + \frac{k}{2}\sin x \, \ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}, \quad k, l \in R$$