Príklad. Riešte nasledujúci systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & -3y_1 & + & 4y_2 \\ y_2' & = & -5y_1 & + & 5y_2 \end{array}$$

Riešenie. Matica koeficientov systému je

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Jej vlastné hodnoty dostaneme riešením charakteristickej rovnice

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

Dostávame vlastné hodnoty $\lambda_1 = 1 + 2i$ a $\lambda_2 = 1 - 2i$.
Vlastný vektor prislúchajúci vlastnej hodnote $\lambda_1 = 1+2i$ dostaneme riešením sústavy lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcrcl} (-3-1-2i)k_1 & + & 4k_2 & = & 0 \\ -5k_1 & + & (5-1-2i)k_2 & = & 0 \end{array}$$

Po úprave

$$\begin{array}{rcrcl} (-4-2i)k_1 & + & 4k_2 & = & 0 \\ -5k_1 & + & (4-2i)k_2 & = & 0 \end{array}$$

Determinant tejto sústavy je nulový, to znamená, že druhá rovnica je násobkom prvej. Z prvej rovnice máme

$$k_2 = (1 + \frac{1}{2}i)k_1$$

Ak zvolíme $k_1 = 2$, dostávame vlastný vektor

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

a k nemu prislúchajúce riešenie systému diferenciálnych rovníc:

$$\vec{y} = \vec{k}\mathrm{e}^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+i \end{pmatrix} \mathrm{e}^t(\cos 2t + i\sin 2t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t\mathrm{cos2t} \\ \mathrm{e}^t(\mathrm{2cos2t} - \mathrm{sin2t}) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t\mathrm{sin2t} \\ \mathrm{e}^t(\mathrm{cos2t} + \mathrm{2sin2t}) \end{pmatrix}$$

Jeho reálna a imaginárna časť sú lineárne nezávislé riešenia systému diferenciálnych rovníc, preto všeobecné riešenie systému diferenciálnych rovníc možno vyjadriť v tvare

$$\vec{y} = c_1 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \mathrm{cos2t} \\ \mathrm{e}^t(2\mathrm{cos2t} - \mathrm{sin2t}) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \mathrm{sin2t} \\ \mathrm{e}^t(\mathrm{cos2t} + 2\mathrm{sin2t}) \end{pmatrix},$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne konštanty.