

1. Overte, či sú dané funkcie riešeniami daných diferenciálnych rovníc:

a) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$, $y''' = 6$

b) $y = \sin x$, $xy'' + xy = 0$

c) $z = \frac{2}{3}t^2e^t$, $z''' - 3z' + 2z = 4e^t$

d) $y = 2e^{-\frac{1}{x^2}}$, $y'x^3 = 2y$

e) $y = x^2 - 4x$, $xdy - ydx = x^2dx$

2. Zo systému kriviek, ktoré sú zadané vzťahom $y = C\sin x$, kde C je ľubovoľná konštanta, určte tú krivku, ktorá prechádza bodom $A(\frac{\pi}{2}, 2)$.

3. Všeobecným riešením diferenciálnej rovnice $y''' = \frac{1}{x^2}$ je funkcia

$$y = -x\ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

kde C_1, C_2, C_3 sú ľubovoľné konštanty. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa začiatočné podmienky: $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 1$.

4. Nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice prechádzajúce daným bodom.

a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $A = (1, 1)$

b) $y' = \frac{1}{\sin x}$, $A = (\frac{\pi}{2}, 0)$

c) $y' = \ln x$, $A = (e, 2)$

5. Riešte separovateľné diferenciálne rovnice.

a) $y\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0$

b) $(1 + e^{-t})zz' = e^t$, $z(0) = 2$

c) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 0$

d) $x^3\sin y y' = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x) = \frac{1}{2}\pi$

6. Riešte homogénne diferenciálne rovnice prvého rádu.

a) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

b) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

c) $u' - \frac{u}{t} = e^{-\frac{u}{t}}$, $u(1) = 0$

d) $xy' \cos \frac{y}{x} = y(\cos \frac{y}{x}) - x$

7. Riešte lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu.

a) $y' - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

b) $y' + xe^x y = 0$

c) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$

d) $y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$

e) $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

8. Riešte dané Bernoulliho diferenciálne rovnice.

a) $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$

b) $y' - 2xy = 2x^3 y^2, \quad y(0) = 1$

c) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

d) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x \sqrt{y}$

Výsledky:

1a-1e. Všetky funkcie sú riešeniami príslušných rovníc, **2.** $y = 2\sin x$, **3.** $y = -x \ln|x| + x^2 - 1$, **4a.** $y = \sqrt{x}$, **4b.** $y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right|$, **4c.** $y = x \ln x - x + 2$, **5a.** $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + c$, **5b.** $z^2 = 2 + 2e^t + 2 \ln \frac{2}{1+e^t}$, **5c.** $y = (x-2)^3, y = 0$, **5d.** $y = \arccos \frac{1}{x^2}$, **6a.** $y^2 - x^2 = cy, y = 0$, **6b.** $y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2, y = x, y = -x$, **6c.** $u = t \ln(c + \ln|t|)$, **6d.** $\sin \frac{y}{x} = -\ln|x| + c$, **7a.** $y = c(x + \sqrt{1+x^2})$, **7b.** $\ln|y| = e^x(x-1) + c$, **7c.** $y = e^x(\ln|x| + c), x \neq 0$, **7d.** $y = (x^3 + c) \ln|x|$, **7e.** $y = \frac{2x - \sin 2x + 4 - \pi}{4 \sin x}$, **8a.** $y = \frac{x^4}{4} \ln^2|cx|$, **8b.** $y = \frac{1}{1-x^2}$, **8c.** $2y^2(x+c) = e^{x^2}$, **8d.** $\sqrt{y} = c \sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$